Povprečja

Jure Aplinc

28.3.2009

Povzetek

Porazdelitev vrednosti spremenljivk lahko predstavimo z histogrami, ki lahko imajo pestro in fizikalno pomembno obliko. Kadar si hočemo to sliko poenostaviti na nekaj številskih parametrov, zelo pogosto uporabljamo povprečja.

Najosnovnejše kar lahko povemo o porazdelitvi je njena aritmetična sredina.

Podatek o srednji legi spremenljivke na osi količine y lahko obogatimo še z oceno o njeni razsutosti ali širini porazdelitve. Imenujejo jo disperzija ali srednji kvadratni odmik.

Pogosto izražamo tudi poševnost, ki posreduje podatke o obliki repa porazdelitve.

1 Naloga

V datoteki Interval.dat so podani časovni intervali (v mikrosekundah) med zaporednimi prihodi posameznih fotonov v detektor. Poiskati je bilo potrebno povprečje ypov in sigmay za to zaporedje in za njegove tretjinske odseke.

1.1 potek reševanja

Računanje povprečja in razsutosti sem opravil z programom napisanim v jeziku C!

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>
#include<string.h>
int main(void){
FILE *fin;
int i, n;
double ypov, ysigma, sum, sum2, yi;
sum=0;
n=0;
//ypov
fin=fopen("Interval.dat", "r");
while(fscanf(fin, "%lf", &yi)==1){
sum+=yi;
n+=1;
}
ypov=0;
ypov=sum/n;
fclose(fin);
printf("ypov= %lf N=%d\n", ypov, n);
//sigmay (2 pass)
fin=fopen("Interval.dat", "r");
sum2=0;
n=0;
```

```
yi=0;
while(fscanf(fin, "%lf", &yi)==1){
sum2=sum2+pow((yi-ypov), 2);
n+=1;
}
ysigma=sqrt(sum2/n);
printf("(two pass) ysigma=%lf N=%d\n", ysigma, n);
fclose(fin);
//sigmay (1 pass)
fin=fopen("Interval.dat", "r");
sum2=0;
sum=0;
n=0;
yi=0;
ypov=0;
ysigma=0;
while(fscanf(fin, "%lf", &yi)==1){
sum+=yi;
sum2+=yi*yi;
n+=1;
}
ypov=sum/n;
ysigma=sqrt(sum2/n-ypov*ypov);
printf("(one pass) ysigma=%lf ypov=%lf N=%d\n", ysigma, ypov, n);
fclose(fin);
return 0;
}
```

1.2 rešitev

N=999

povrecje [μs]	σ [μs]
311.084985	314.841370

N=333

del	povprecje [μs]	σ [μs]
1	302.764264	323.665388
2	331.600000	327.621305
3	298.890691	290.932058

Komentar k rezultatom:
Povprecje dobljeno iz vseh podatkov je aritmetična sredina parcialnih (tretjinskih) povprečij.

2 Naloga

Določiti je bilo potrebno povprečja ypov, sigmay in muy za spremenljivki v podatkih Agxx.dat in Ozadje.dat. Primerjati direktna in predalčna povprečja. Narisati grafa za standardizirano spremenljivko u = (y − ypov)/sigmay. Primerjati ju z grafom Gaussove porazdelitve.

2.1 potek reševanja

Programu iz naloge 1 sem dodal nekaj vrstic za izracun poševnosti μy.

```
fin=fopen("Agxx.dat", "r");
yi=0;
n=0;
sum3=0;
while(fscanf(fin, "%lf", &yi)==1){
sum3+=pow((yi-ypov), 3);
n+=1;
}
muy=sum3/pow(ysigma, 3);
printf(" muy=%lf sum3=%lf N=%d\n", muy, sum3, n);
fclose(fin);
```

2.2 rešitev

2.2.1 Agxx

Povprecje, efektivni odmik in poševnost izracunani direktno iz podatkov:

povprecje [st. razpadov]	σ [st. razpadov]	μ
17.403000	4.172121,	266.845782

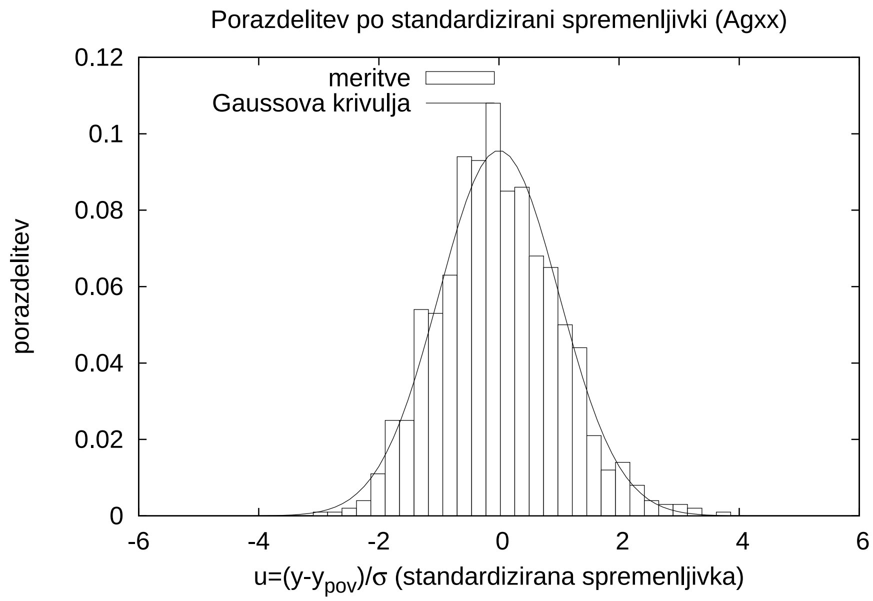
Povprecje izracunano iz opredalčenih podatkov:

povrečje [st. razpadov]
17.403000

Komentar 1:

Povprecje opredalčenih podatkov je enako kot tisto dobljeno direktno iz podatkov saj vsak razred v histogramu predstavlja le eno diskretno vrednost. Z drugimi besedami: predalčenje v tem primeru podatkov ne pokvari ampak jih le razvrsti!

Graf porazdelitve kot funkcija standarnizirane spremenljivke u = (y − ypov)/sigmay (slika 1).



Slika 1: Porazdelitev razpadov v odvisnosti od standardizirane spremenljivke!

2.2.2 Ozadje

V datoteki so meritve $log(\frac{j_0}{j})$ v odvisnosti od energije. Povprecje, efektivni odmik in poševnost izracunani direktno iz podatkov:

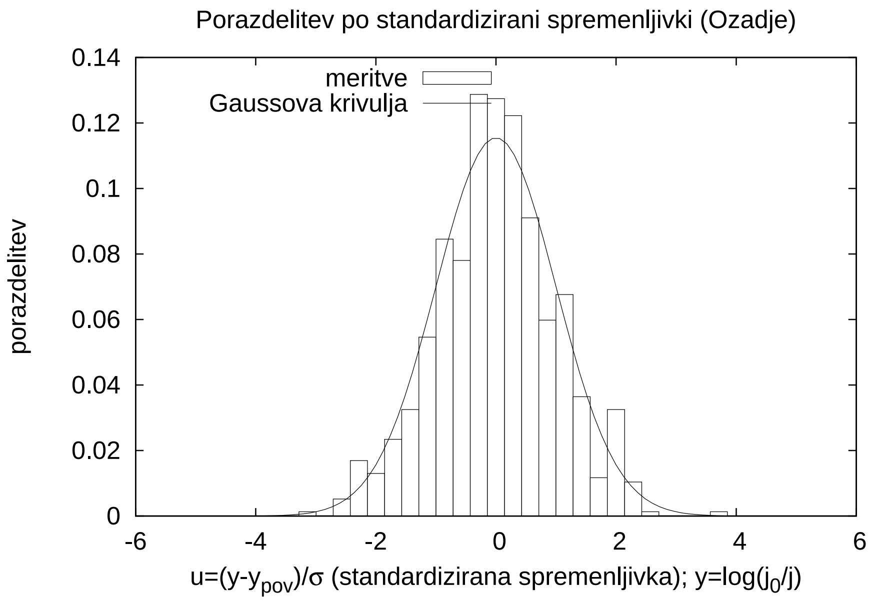
povprecje $log(\frac{j_0}{j})$	σ	μ
1.77893*10$^-$8	7.00746*10$^-$5,	64.1528

Povprecje izracunano iz opredalcenih podatkov:

povprecje $log(\frac{j_0}{j})$
-2.608*10$^-$8

Komentar 2:

Opredalčeno povprečje se razlikuje od pravega ker je predalčenje v resnici zaokroževanje! Graf porazdelitve prikazuje slika 2.



Slika 2: normirana porazdelitev absorpcije v odvisnosti od standardizirane spremenljivke!

Komentar 3:

Iz numeričnih rezultatov (μ) sledi, da je 1. graf bolj asimetičen kot drugi saj je $\mu_1 > \mu_2$. Podoben sklep lahko postavimo tudi pri opazovanju obeh grafov!

3 Naloga

Pri tej nalogi je bilo potrebno izracunati poprecno vrednost in disperzijo funkcije sinus numericno. Disperzijo pa tudi analitično!

3.1 numerično računanje povprečja in σ

Sestavil sem program ki računa povprečje in disperzijo (one pass).

```
dx=0.0001;
y=0;
sum=0;
n=0;
for(x=0; x<100000; x+=dx){
y=sin(x);
sum+=y;
sum2=sum2+y*y;
n++;
}
ypov=(double) sum/n;
ysigma=(double) sqrt(sum2/n-ypov*ypov);
```

Numerično računanje da naslednje rezultate:

povprecje	σ	število ciklov v algoritmu
1.99936*10^{-5}	0.707107	1*10^9
0.000437662	0.706942	1*10^7
0.00137706	0.708647	1000000

Komentar 4:

Vidimo lahko, da se povprecje manjša (in v limiti najbrž konvergira proti 0) če povečujemo število ciklov. Disperzija pa ostaja približno konstantna.

3.2 Teoretično računanje disperzije

Vzemimo, da smo funkcijo sinus obravnavali po točkah zalo zelo na gosto tedaj nam ni več treba obravnavati nekaj 10000 period ampak jo je dovolj le pol. Priročno je za nadaljno obravnavo uporabljati funkcijo arcsin.

Recimo, da vzamemo infinitizimalno majhen premik v smeri x potem lahko porazdelitev zapišemo kot odvod:

$\omega(x) = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ torej:

$\omega(x) = \frac{d(arcsin(x))}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Preverimo, če je povprečje res 0: $\int_{-1}^{1} x\omega(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0$

Sedaj ko imamo funkcijo porazdelitve in vemo kakšno je povprečje porazdeltve lahko izračunamo kvadrat disperzije:

$\sigma^2 = \int_0^1 x^2\omega(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi/4$

Iz računa sledi, da je disperzija $\sigma = \sqrt{\pi/4} = 0.8862269254527580$

Komentar 5: Iz rezultatov lahko torej zaključimo, da smo v obeh primerih izračunali približno enako.

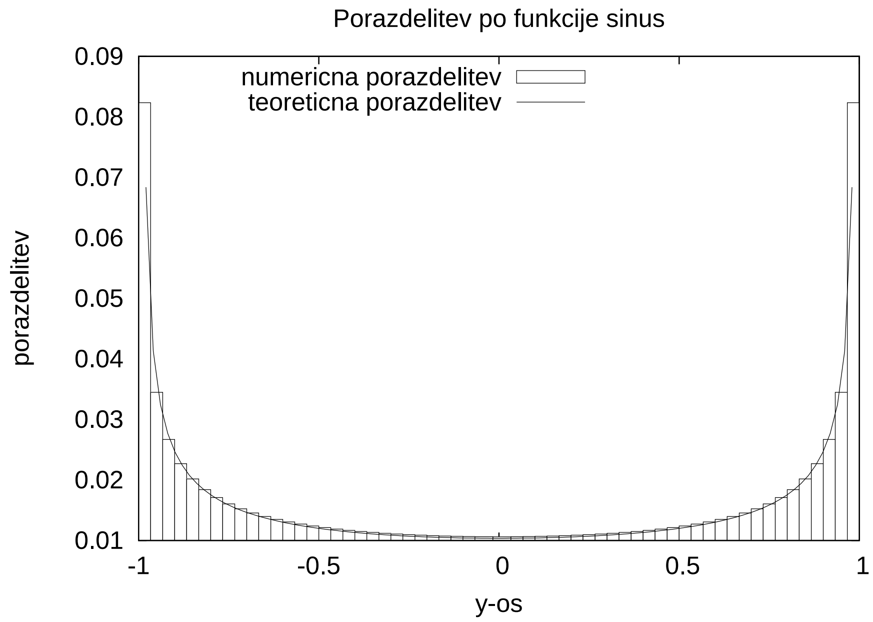
Poglejmo še kako bi se dalo izračunati povprečje in σ po definiciji kar iz funkcije sinus. $ypov = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ ko gre število zočk proti neskončnosti potem preide vsota v integral: $ypov = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} sin(x)\,dx = 0$

$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}$

Iz tega sledi, da je $\sigma = 0.707106781186547524400$, kar je pa zelo podobno mojemu numeričnemu rezultatu.

Komentar 6: Ta rezultat se očitno bolje ujema z numeričnim.

Narisimo teoretično in numerično izračunano porazdelitev še na graf (slika 3).



Slika 3: Normirana porazdelitev funkcije sinus!