Debyeva frekvenca v dvodimenzionalnem kristalu

Gregor Plohl, 28030009

1.) Naloga

Imamo dvodimenzionalno heksagonalno mrežo z mrežno razdaljo $a = 3\text{Å}$. Pri hitrosti zvoka $c = 10^3\ m/s$ moramo izračunati Debyevo frekvenco ω_D.

2.) Rešitev

Debyeva frekvenca je definirana kot

$$V \int_0^{\omega_D} g(\omega) \mathrm{d}\omega = N$$

kjer je N celotno število phononskih stanj in $g(\omega)$ gostota stanj.

'*Volumen*' heksagonalne celice je $V = L^2 \sin 60°$, število vseh stanj pa $(L/a)^2$.

Gostoto stanj lahko dobimo tako, da seštejemo stanja po vsej recipročni mreži .

Seštevanje lahko spremenimo v integral

$$\int \frac{\mathrm{d}k}{\Delta^2 k} = \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \sin 60°} \int 2\pi k \mathrm{d}k$$

Sedaj lahko uporabimo disperzijsko relacijo $\omega = ck$ ter $\mathrm{d}\omega = c\mathrm{d}k$ in dobimo

$$V g(\omega) \mathrm{d}\omega = \frac{L^2}{\sin 60°} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{c^2} \omega \mathrm{d}\omega$$

Sledi

$$g(\omega) = \frac{1}{sin^2 60°} \frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{c^2}$$

S to gostoto stanj se prvi integral glasi

$$L^2 \cos 60° \int_0^{\omega_D} \frac{1}{sin^2 60°} \frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{c^2} \mathrm{d}\omega = \frac{L^2}{a^2}$$

Iz tega pa že dobimo Debyevo frekvenco

$$\frac{1}{2} \omega_D^2 = 2\pi \sin 60° \frac{c^2}{a^2}$$

oziroma

$$\omega_D = \sqrt{2\pi\sqrt{3}} \frac{c}{a}$$

Do rešitve pa vodi tudi lažja pot. Pomagamo si z Debyevim valovnim številom $k_D = \omega_D / c$. k_D je definiran tako, da je celotno število stanj v polmeru k_D enako številu stanj v Brillounovi coni. Velja

$$k_D^2 \pi \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \sin 60°} = \left(\frac{L}{a}\right)^2$$

Dobimo

$$k_D = \sqrt{2\pi\sqrt{3}} \frac{1}{a}$$

oziroma spet

$$\omega_D = \sqrt{2\pi\sqrt{3}} \frac{c}{a}$$

Iz podanih podatkov izračunamo

$$\omega_D = \sqrt{2\pi\sqrt{3}} \frac{c}{a} = 1.1 \cdot 10^{13} \, {}^1\!/_s$$