Dvodimenzionalni harmonski oscilator II

Manca Podvratnik

13. maj 2008

1 Naloga

Obravnavaj lastna stanja dvodimenzionalnega harmonskega oscilatorja

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} a \mathbf{r}^2.$$

- Za drugo vzbujeno stanje poišči taka lastna stanja, ki so hkrati tudi lastna stanja operatorja vrtilne količine okoli osi z.
- Kako se drugo vzbujeno stanje razcepi v homogenem magnetnem polju v smeri osi z?

2 Lastna stanja 2D harmonskega oscilatorja

Ker govorimo o dvodimenzionalnem harmonskem oscilatorju, v zgornjem izrazu za H nastopata $\mathbf{p}$ in $\mathbf{r}$ kot vektorja z dvemi elementi. Izraz za H prepišemo v vsoto dveh delov - vsak od teh delov je bodisi odvisen samo od koordinate x bodisi samo od y.

$$H = \left(\frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} a x^2 \right) + \left(\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} a y^2 \right) = H_x + H_y$$

To smo naredili zato, ker bomo poskušali poiskati lastne funkcije Hamiltonovega operatorja kot produkt funkcij, ki sta odvisne samo od ene koordinate.

$$\psi(x, y) = \psi_x(x) \psi_y(y)$$

Lastne funkcije $\psi_x(x)$ in $\psi_y(y)$ operatorjev H_x in H_y lahko iščemo posebej

$$H_x \psi_x = E_x \psi_x, \quad H_y \psi_y = E_y \psi_y,$$

potem pa lastno funkcijo operatorja H izračunamo kot produkt $\psi_x\psi_y$ z lastno vrednostjo $E = E_x + E_y$. Da bi to dokazali, s Hamiltonovim operatorjem delujmo na omenjen produkt

$$H\psi_x\psi_y = H_x\psi_x\psi_y + \psi_x H_y\psi_y = (E_x + E_y)\psi_x\psi_y.$$

Del Hamiltonovega operatorja, ki je odvisen od x, deluje le na ψ_x in enako za y.

Operatorja H_x in H_y predstavljata v resnici harmonski oscilator v eni dimenziji. Zanj že poznamo lastne funkcije in lastne energije

$$E_{x/y} = \hbar\omega(n_{x/y} + \frac{1}{2}),$$

kjer sta $\omega = \sqrt{a/m}$ in $n_{x/y} = 0, 1, 2, ...$ Lastne energije in funkcije dvodimenzionalnega harmonskega oscilatorja zapišemo kot

$$E = \hbar\omega(n_x + n_y + 1),$$

$$|\psi\rangle = |n_x\rangle\,|n_y\rangle = |n_x n_y\rangle\,.$$

Dobili smo lastna stanja, ki so degenerirana. Prvo vzbujeno stanje $E_1 = 2\hbar\omega$ je naprimer dvakrat degenerirano, drugo vzbujeno stanje $E_2 = 3\hbar\omega$ trikrat in tako naprej. Lastna stanja z energijo E_2 so namreč $|20\rangle$, $|11\rangle$ in $|02\rangle$.

3 Lastna stanja operatorja vrtilne količine okoli osi z

Iščemo lastna stanja vrtilne količine okoli osi z

$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Rešujemo torej enačbo $L_z\,|\psi\rangle = \alpha\,|\psi\rangle$.

$$-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \alpha\psi$$

$$\psi = \psi_0 e^{i\alpha\varphi/\hbar}$$

Preriodični pogoj $\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$ nam da zahtevo, da je $m = \alpha/\hbar$ celo število. Z normalizacijo določimo še vrednost $\psi_0 = 1/\sqrt{2\pi}$.

Lastna vrednost operatorja L_z in $n = n_x + n_y$ sta dobri kvantni števili, saj velja $[L_z, H] = 0$ (pri tem izračunu izrazimo H v polarnih koordinatah).

4 Lastna stanja operatorjev H in L_z

Prej smo omenili, da je drugo vzbujeno lastno stanje z energijo E_2 trikrat degenerirano. Splošen nastavek za valovno funkcijo drugega vzbujenega stanja v bazi $n_x n_y$ zato zapišemo kot vsoto vseh treh stanj

$$|\psi\rangle = a\,|20\rangle + b\,|11\rangle + c\,|02\rangle\,.$$

Iščemo taka stanja ψ, ki so hkrati lastna stanja H in L_z. Zgornje stanje je že lastna funkcija H. Zadostiti moramo še drugi zahtevi $L_z\,|\psi\rangle = \hbar m\,|\psi\rangle$. Če to enačbo z leve pomnožimo posebej z $\langle 20|$, $\langle 11|$ in $\langle 02|$, dobimo sistem treh enačb za a, b in c.

$$\begin{pmatrix} \langle 20|\,L_z\,|20\rangle & \langle 20|\,L_z\,|11\rangle & \langle 20|\,L_z\,|02\rangle \\ \langle 11|\,L_z\,|20\rangle & \langle 11|\,L_z\,|11\rangle & \langle 11|\,L_z\,|02\rangle \\ \langle 02|\,L_z\,|20\rangle & \langle 02|\,L_z\,|11\rangle & \langle 02|\,L_z\,|02\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \hbar m \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Matrika na desni ima lastne vrednosti, ki so enake lastnim vrednostim operatorja vrtilne količine, in lastne vektorje, ki so koeficienti razvoja po novi bazi nm.

Prve tri lastne funkcije enodimenzionalnega harmonskega oscilatorja so

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi x_0^2}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}, \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}},$$

$$\psi_1 = \sqrt{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)\psi_0,$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - 1\right)\psi_0.$$

Lastne funkcije dvodimenzionalnega harmonskega oscilatorja so ustrezni zmnožki zgornjih funkcij. Zapisane v polarnih koordinatah so

$$\psi_{20} = \psi_2(x)\psi_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x_0^2}}\left(2\frac{r^2}{x_0^2}cos^2(\varphi) - 1\right)e^{-\frac{r^2}{2x_0^2}}$$

$$\psi_{02} = \psi_0(x)\psi_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x_0^2}}\left(2\frac{r^2}{x_0^2}sin^2(\varphi) - 1\right)e^{-\frac{r^2}{2x_0^2}}$$

$$\psi_{11} = \psi_1(x)\psi_1(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi x_0^2}}\frac{r^2}{x_0^2}sin(\varphi)cos(\varphi)e^{-\frac{r^2}{2x_0^2}}$$

Izračunati moramo matrične elemente. Vsi trije diagonalni elementi so enaki nič zaradi kotnega dela v integralu. Iz istega razloga sta nič tudi elementa $\langle 20| L_z |02\rangle$ in $\langle 02| L_z |20\rangle$.

Bolj podrobno si moramo ogledati ostale elemente.

$$\langle 11| L_z |20\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi x_0^2}}\frac{r^2}{x_0^2} sin(\varphi)cos(\varphi)(-i\hbar)\frac{1}{\sqrt{2\pi x_0^2}}\left(-4\frac{r^2}{x_0^2}sin(\varphi)cos(\varphi)\right)e^{-\frac{2x^2}{2x_0^2}} rdrd\varphi$$

$$\langle 11| L_z |20\rangle = i\hbar\sqrt{2}\int |\psi_{11}|^2 \, dS = i\hbar\sqrt{2}$$

Podobno dobimo rezultat za $\langle 11| L_z |02\rangle$

$$\langle 11| L_z |02\rangle = -i\hbar\sqrt{2}.$$

Vemo še, da sta

$$\langle 20| L_z |11\rangle = \langle 11| L_z |20\rangle^*$$
$$\langle 02| L_z |11\rangle = \langle 11| L_z |02\rangle^*$$

Imamo torej matriko

$$\begin{pmatrix} 0 & -i\hbar\sqrt{2} & 0 \\ i\hbar\sqrt{2} & 0 & -i\hbar\sqrt{2} \\ 0 & i\hbar\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Pri iskanju lastnih vrednosti $\hbar m$ in lastnih vektorjev $(a, b, c)^T$ dobimo enačbo za lastne vrednosti

$$-(\hbar m)^3 - 2(i\hbar\sqrt{2})^2(\hbar m) = 0.$$

$$\hbar m = 0, \pm 2\hbar$$

Lastni vektorji, ki pripadajo lastnim vrednostim so

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}.$$

Lastne funkcije operatorjev H in L_z v bazi nm se izražajo s starimi baznimi funkcijami $n_x n_y$

$$|2,0\rangle_{nm} = \frac{1}{\sqrt{2}}|20\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|02\rangle,$$

$$|2,+2\rangle_{nm} = -\frac{i}{2}|20\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle + \frac{i}{2}|02\rangle,$$

$$|2,-2\rangle_{nm} = +\frac{i}{2}|20\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle - \frac{i}{2}|02\rangle.$$

5 Razcepitev stanj v magnetnem polju v smeri osi z

Če je delec v dvodimenzionalnem harmonskem oscilatorju v magnetnem polju, moramo k hamiltonianu prišteti še en člen

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}a\mathbf{r}^2 - \gamma L_z B_z.$$

Razcep v magnetnem polju je odvisen od kvantnega števila m. Ker lahko drugo vzbujeno stanje sestavimo iz stanj z vrednostmi $m = 0, \pm 2$, se energija drugega vzbujenega stanja v magnetnem polju razcepi v 3 dele.