Delec s spinom

Eva Grum

6. maj 2008

Naloga Imamo delec s spinom 1/2 ($S_z = \pm 1/2$) in iščemo funkcijo, ki je lastna funkcija spina ne glede na smer v prostoru ($\vec{n}$) oz. v Diracovem zapisu $\vec{S} \cdot \vec{n} \mid \psi\rangle = \frac{h}{2} \mid \psi\rangle$. Se pravi iščemo funkcijo ψ.

Opomba: zaradi enostavnosti sem pisala vse h prečne kar s h.

Najprej si poglejmo kako na vektorje naše 2D baze Hilbertovega prostora, ki jih označmo z $\mid \frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = \mid\uparrow\rangle$ in $\mid \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle = \mid\downarrow\rangle$ delujejo določeni operatorji:

$$S^2 \left|\uparrow\right\rangle = h^2 S\left(S+1\right)\left|\uparrow\right\rangle = \frac{3}{4}h^2\left|\uparrow\right\rangle \qquad S_z\left|\uparrow\right\rangle = \frac{h}{2}\left|\uparrow\right\rangle \qquad S_z\left|\downarrow\right\rangle = \frac{-h}{2}\left|\downarrow\right\rangle$$

$$S^+\left|\uparrow\right\rangle = 0 \qquad S^+\left|\downarrow\right\rangle = h\left|\uparrow\right\rangle S^-\left|\downarrow\right\rangle = 0 \qquad S^-\left|\uparrow\right\rangle = h\left|\downarrow\right\rangle$$

Najprej rešimo problem v Diracovem zapisu in tukaj lahko zapišemo funkcijo ψ kot $\mid\psi\rangle = A\left|\uparrow\right\rangle + B\left|\downarrow\right\rangle$ oz. $\psi = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. Ker nam lahko vektor $\vec{n}$ kaže v vse smeri v prostoru, ga zapišimo v sferičnih koordinatah in vektor$\vec{S}$ zapišimo po komponentah: $\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$ in $\vec{S} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix}$.

Zapišemo

$$\vec{S} * \vec{n} = S_x\cos\varphi\sin\vartheta + S_y\sin\varphi\sin\vartheta + S_z\cos\vartheta$$

Ne poznamo delovanja operatorjev S_x in S_y, zato ju poskusimo nadomestiti z operatorjema S^+ in S^-. Izrazimo ju iz zvez $S^+ = S_x + iS_y$ in $S^- = S_x - iS_y$. Dobimo $S_x = \frac{1}{2}\left(S^+ + S^-\right)$ in $S_y = -\frac{i}{2}\left(S^+ - S^-\right)$. Izraza uporabimo v zgornji enačbi in dobimo

$$\vec{S} * \vec{n} = \frac{1}{2}\left(S^+ + S^-\right)\cos\varphi\sin\vartheta + \frac{i}{2}\left(S^+ - S^-\right)\sin\varphi\sin\vartheta + S_z\cos\vartheta =$$

$$\frac{1}{2}S^+\sin\vartheta\underbrace{\left(\cos\varphi - i\sin\varphi\right)}_{e^{-i\varphi}} + \frac{1}{2}S^-\sin\vartheta\underbrace{\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)}_{e^{i\varphi}} + S_z\cos\vartheta =$$

$$\frac{\sin\vartheta}{2}\left(S^+e^{-i\varphi} + S^-e^{\varphi}\right) + S_z\cos\vartheta$$

Rešujemo osnovno enačbo

$$\left(\frac{\sin\vartheta}{2}\left(S^+e^{-i\varphi} + S^-e^{\varphi}\right) + S_z\cos\vartheta\right)\left(A\left|\uparrow\right\rangle + B\left|\downarrow\right\rangle\right) = \frac{h}{2}\left(A\left|\uparrow\right\rangle + B\left|\downarrow\right\rangle\right)$$

Zdaj uporabimo povezave o delovanju operatorjev zbranih na začetku in ven dobimo

$$\big(A\cos\vartheta + Be^{-i\varphi}\sin\vartheta\big)\left|\uparrow\right\rangle + \big(Ae^{i\varphi}\sin\vartheta - B\cos\vartheta\big)\left|\downarrow\right\rangle = A\left|\uparrow\right\rangle + B\left|\downarrow\right\rangle$$

Ker sta spina neodvisna imamo sistem dveh enačb

$$A\cos\vartheta + Be^{-i\varphi}\sin\vartheta - A = 0$$

$$Ae^{i\varphi}\sin\vartheta - B\cos\vartheta - B = 0$$

Zapišemo z dvojnimi koti

$$-2A\left(\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right) + 2Be^{-i\varphi}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} = 0$$

$$-2B\left(\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right) + 2Ae^{-i\varphi}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} = 0$$

Enačbi, ki smo ju ustrezno pokrajšali razpišemo v sistem matrik

$$\begin{pmatrix} -\sin\frac{\vartheta}{2} & \cos\frac{\vartheta}{2}e^{-i\varphi} \\ \sin\frac{\vartheta}{2}e^{i\varphi} & -\cos\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Iz sistema vidimo, da sta $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2}e^{-i\varphi} \\ \sin\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}$ oz. naša rešitev je $\mid\psi\rangle = \cos\frac{\vartheta}{2}\left|\uparrow\right\rangle + \sin\frac{\vartheta}{2}e^{i\varphi}\left|\downarrow\right\rangle$.

Zdaj pa rešimo ta problem še s Paulijevimi matrikami, ki so povezane s opertorjem S na sledeč način: $\vec{S} = \frac{h}{2}\vec{\sigma}$, kjer je $\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$. Posamezne komponente pa so sledeče $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. ZZapišemo našo začetno enačbo zdaj s temi matrikami:

$$\frac{h}{2}\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}\cdot\vec{n}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{h}{2}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \cos\varphi\sin\vartheta - i\sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\varphi\sin\vartheta + i\sin\varphi\sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta e^{-i\varphi} \\ \sin\vartheta e^{i\varphi} & -\cos\vartheta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Pridemo do iste enačbe, kot pri prvem postopku. Nadaljujemo z razpisom na dvojne kote in reševanjem sistema. Rešitve so enake, kot smo jih našli že zgoraj.

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2}e^{-i\varphi} \\ \sin\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}$$

oz.

$$\mid\psi\rangle = \cos\frac{\vartheta}{2}\left|\uparrow\right\rangle + \sin\frac{\vartheta}{2}e^{i\varphi}\left|\downarrow\right\rangle.$$