Vrtilna kolicina V

Mitja Eržen, 28030176

25. maj 2008

1 Naloga:

- Delec z vrtilno količino $l = 1$, ki se giblje v krogelno simetričnem potencialu, je v stanju $m = 1$. Ob $t = 0$ vklopimo homogeno magnetno polje v ravnini yz pod kotom φ glede na os z. Ob času π/ω_L (ω_L je Larmorjeva frekvenca) izmerimo projekcijo vrtilne količine delca na os z. Kolikšna je pričakovana vrednost meritve? S kolikšno verjetnostjo dobimo katerega od možnih rezultatov meritve?

2 Rešitev:

Naloga je zelo podobna nalogi "Vrtilna kolicina II", zato se bom tudi zelo naslonil na tiste rešitve. Definiramo koordinatni sistem s črtico, ki ga dobimo z vrtenjem koordinatnega sistema brez črtice za kot φ okrog osi x. Ob $t = 0$ vklopimo zunanje homogeno magnetno polje z gostoto B_0, ki kaže v smeri osi z'. Časovni razvoj valovne funkcije za $t > 0$ je

$$|11, t\rangle = -\sin^2(\varphi/2)|1-1\rangle' e^{-i\gamma B_0 t} + (1/\sqrt{2})\sin\varphi|10\rangle' + \cos^2(\varphi/2)|11\rangle' e^{i\gamma B_0 t}.$$

Za izpeljavo glej nalogo Vrtilna kolicina I.

Transformirajmo valovno funkcijo v podprostoru $l = 1$ iz baze lastnih funkcij operatorja L_z v bazo lastnih funkcij operatorja L'_z (transformacijo delamo, ker znamo $|11, t\rangle$ razviti po lastnih funkcijah operatorja L'_z, po lastnih funkcijah operatorja L_z pa ne). Pri tem je kot med osema z in z' ter med y in y' enak φ, osi x in x' pa sovpadata. To transformacijo opravimo s tole funkcijo operatorja: $e^{i\frac{\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\varphi}}{\hbar}}$. Operatorja $\mathbf{L}$ in $\boldsymbol{\varphi}$ sta v koordinatnem zapisu:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_x & L_y & L_z \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Transformacijo valovne funkcije torej opravimo z funkcijo operatorja $e^{i\frac{\varphi L_x}{\hbar}}$, ki jo moramo razviti v potenčno vrsto, da z njo lahko delujemo na valovno funkcijo:

$$e^{i\frac{\varphi L_x}{\hbar}} = 1 + \frac{i\varphi L_x}{\hbar} + \frac{1}{2!}\left(\frac{i\varphi L_x}{\hbar}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{i\varphi L_x}{\hbar}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{i\varphi L_x}{\hbar}\right)^4 + \frac{1}{5!}\left(\frac{i\varphi L_x}{\hbar}\right)^5 + \dots$$

L_x zapišemo z L_+ in L_-, za katera vemo kaj naredita z lastnimi funkcijami operatorja L_z:

$$L_+ = L_x + iL_y,$$

$$L_- = L_x - iL_y,$$

torej

$$L_x = \frac{L_+ + L_-}{2}.$$

Delujmo z operatorjema L_+ in L_- na lastne funkcije operatorja L_z v podprostoru $l = 1$:

$$\begin{aligned} L_+|11\rangle &= 0, \\ L_+|10\rangle &= \sqrt{2}\hbar|11\rangle, \\ L_+|1-1\rangle &= \sqrt{2}\hbar|10\rangle, \\ L_-|11\rangle &= \sqrt{2}\hbar|10\rangle, \\ L_-|10\rangle &= \sqrt{2}\hbar|1-1\rangle, \\ L_-|1-1\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Operator lahko zapišemo kot matriko, valovno funkcijo kot vektor, delovanje operatorja na valovno funkcijo pa potem zapišemo kot množenje matrike in vektorja. Matriko, ki predstavlja operator $iL_x/\hbar$ v podprostoru $l = 1$ zapišemo takole:

$$\begin{bmatrix} \langle 11|\frac{iL_x}{\hbar}|11\rangle & \langle 11|\frac{iL_x}{\hbar}|10\rangle & \langle 11|\frac{iL_x}{\hbar}|1-1\rangle \\ \langle 10|\frac{iL_x}{\hbar}|11\rangle & \langle 10|\frac{iL_x}{\hbar}|10\rangle & \langle 10|\frac{iL_x}{\hbar}|1-1\rangle \\ \langle 1-1|\frac{iL_x}{\hbar}|11\rangle & \langle 1-1|\frac{iL_x}{\hbar}|10\rangle & \langle 1-1|\frac{iL_x}{\hbar}|1-1\rangle \end{bmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Delovanje operatorja $\left(\frac{iL_x}{\hbar}\right)^2$ predstavimo s tole matriko:

$$-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Operator $\left(\frac{iL_x}{\hbar}\right)^3$ predstavimo z matriko

$$-\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ki se le za predznak razlikuje od matrike za $iL_x/\hbar$. Lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\varphi L_x}{\hbar}} &= 1 + \varphi\frac{iL_x}{\hbar} + \frac{\varphi^2}{2!}\left(\frac{iL_x}{\hbar}\right)^2 - \frac{\varphi^3}{3!}\left(\frac{iL_x}{\hbar}\right) - \frac{\varphi^4}{4!}\left(\frac{iL_x}{\hbar}\right)^2 + \frac{\varphi^5}{5!}\left(\frac{iL_x}{\hbar}\right) + \ldots = \\ &= 1 + \frac{iL_x}{\hbar}\left[\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots\right] + \left(\frac{iL_x}{\hbar}\right)^2\left[\frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots\right] = \\ &= 1 + \frac{iL_x}{\hbar}\sin\varphi + \left(\frac{iL_x}{\hbar}\right)^2[1 - \cos\varphi] = \\ &= 1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\varphi \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2(\frac{\varphi}{2}) & \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\varphi & -\sin^2(\frac{\varphi}{2}) \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\varphi & \cos\varphi & \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\varphi \\ -\sin^2(\frac{\varphi}{2}) & \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\varphi & \cos^2(\frac{\varphi}{2}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sedaj lahko zapišemo začetno stanje valovne funkcije v sistemu s črtico:

$$\begin{bmatrix} \cos^2(\frac{\varphi}{2}) & \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\varphi & -\sin^2(\frac{\varphi}{2}) \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\varphi & \cos\varphi & \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\varphi \\ -\sin^2(\frac{\varphi}{2}) & \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\varphi & \cos^2(\frac{\varphi}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\frac{\varphi}{2}) \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\varphi \\ -\sin^2(\frac{\varphi}{2}) \end{bmatrix}.$$

Naredimo časovni razvoj začetnega stanja valovne funkcije v sistemu s črtico:

$$\begin{bmatrix} \cos^2(\frac{\varphi}{2})e^{i\omega_L t} \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\varphi \\ -\sin^2(\frac{\varphi}{2})e^{-i\omega_L t} \end{bmatrix}, \omega_L = \gamma B_0.$$

Ob času π/ω_L je valovna funkcija v sistemu s črtico enaka

$$\begin{bmatrix} -\cos^2(\frac{\varphi}{2}) \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\varphi \\ \sin^2(\frac{\varphi}{2}) \end{bmatrix}.$$

Sedaj gremo nazaj v sistem brez črtice, saj ob času π/ω_L izmerimo projekcijo vrtilne količine na os z. To storimo tako, da na valovno funkcijo delujemo z funkcijo operatorja $e^{i\frac{(-\varphi)L_x}{\hbar}}$, ki ga v matrični obliki zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} \cos^2(\frac{\varphi}{2}) & -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\varphi & -\sin^2(\frac{\varphi}{2}) \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\varphi & \cos\varphi & -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\varphi \\ -\sin^2(\frac{\varphi}{2}) & -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\varphi & \cos^2(\frac{\varphi}{2}) \end{bmatrix}.$$

Pretransformirajmo torej valovno funkcijo v sistem brez crtice:

$$\begin{bmatrix} \cos^2(\frac{\varphi}{2}) & -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\varphi & -\sin^2(\frac{\varphi}{2}) \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\varphi & \cos\varphi & -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\varphi \\ -\sin^2(\frac{\varphi}{2}) & -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\varphi & \cos^2(\frac{\varphi}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\varphi \\ \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos^2\varphi \\ i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2\varphi) \\ \sin^2\varphi \end{bmatrix},$$

vmes smo uporabili zveze med kotnimi funkcijami dvojnih kotov. Operator L_z v podprostoru $l = 1$ zapišimo kot matriko:

$$\begin{bmatrix} \langle 11|L_z|11\rangle & \langle 11|L_z|10\rangle & \langle 11|L_z|1-1\rangle \\ \langle 10|L_z|11\rangle & \langle 10|L_z|10\rangle & \langle 10|L_z|1-1\rangle \\ \langle 1-1|L_z|11\rangle & \langle 1-1|L_z|10\rangle & \langle 1-1|L_z|1-1\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo pričakovano vrednost projekcije vrtilne količine na z os:

$$\begin{bmatrix} -\cos^2\varphi \\ i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2\varphi) \\ \sin^2\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos^2\varphi \\ i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2\varphi) \\ \sin^2\varphi \end{bmatrix} = \hbar\cos^4\varphi - \hbar\sin^4\varphi = \hbar\cos 2\varphi.$$

To bi tudi klasično pričakovali. Vendar meritev ne da pričakovane vrednosti, ampak eno od lastnih vrednosti operatorja L_z. Verjetnost, da pri posamezni meritvi izmerimo eno od lastnih vrednosti operatorja L_z so:

$$P(L_z = \hbar) = \cos^4\varphi,$$

$$P(L_z = 0) = \frac{1}{2}\sin^2(2\varphi)^2,$$

$$P(L_z = -\hbar) = \sin^4 \varphi.$$

Dobimo jih, če kvadriramo absolutno vrednost koeficientov (pri nas so ti koeficienti realni in jih le kvadriramo) v razvoju naše valovne funkcije ob času $t = \pi/\omega_L$, v sistemu brez črtice. Pri tem $P(L_z = \hbar)$ pomeni verjetnost, da pri meritvi projekcije vrtilne količine delca na os z izmerimo vrednost $\hbar$.