Damjan Delač

Kvantna mehanika 1

Spin III

Naloga:
Za delca s spinoma 1 in 3/2
1. zapiši bazo,
2. izračunaj Clebsch-Gordanove koeficiente za razvoj za razvoj baznih funkcij z dobrim celotnim spinom in celotno *z*-komponento spina po produktni bazi.

Delec s spinom $S_1 = 1$ se giblje v potencialu delca s spinom $S_2 = 3 / 2$. Potencial, ki ga čuti, je odvisen od medsebojne orientacije spinov obeh delcev:

$$V(x) = -\lambda\delta(x)\vec{S}_1\vec{S}_2$$

Določi energije in degeneracije vezanih stanj takega sistema.

Rešitev:
Kakšna so vezana stanja tega sistema?

$$V(x) = -\lambda\delta(x)\vec{S}_1\vec{S}_2$$

Zapišemo potencial malo drugače:

$$S^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 = \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2\vec{S}_1\vec{S}_2 \qquad \vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

Mešana člena lahko seštejemo, ker S_1 in S_2 komutirata.

S kvadrati spinov je lažje računati, zato zapišimo:

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{S^2 - (S_1^2 + S_2^2)}{2}$$

Dimenzija prostora S: 2S+1
Celotna dimenzija Hilbertovega prostora: $3 \cdot 4 = 12$
Vse možne kombinacije:

$|S_1 S_{1z}\rangle |S_2 S_{2z}\rangle$

$$|11\rangle\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle \quad |11\rangle\left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle \quad |11\rangle\left|\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle \quad |11\rangle\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$|10\rangle\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle \quad |10\rangle\left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle \quad |10\rangle\left|\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle \quad |10\rangle\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$|1-1\rangle\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle |1-1\rangle\left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle |1-1\rangle\left|\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle |1-1\rangle\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle$$

Da bo zapis krajši, bomo pisali:

$$|11\rangle\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle = |1\rangle\left|\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$|10\rangle\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle = |0\rangle\left|\frac{3}{2}\right\rangle$$

Gremo v drugo bazo. Odpovemo se funkcijam, ki so lastne funkcije posameznih koordinat spina. Vzamemo raje kvadrat spina.
Iščemo bazo lastnih funkcij S^2, S_1^2, S_2^2
Možnosti za S: $\rightarrow \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ velja: $S = |S_1 - S_2|, \ldots, |S_1 + S_2|$
Možnosti za S_Z:

$$\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$$

$$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

Imamo 12 lastnih funkcij, torej dimenzijo 12.

Kako se nova baza izrazi s staro?
Transformacija je podana s Clebsch-Gordanovimi koeficienti. Poskusimo izpeljati brez tabele.
Dve kvantni števili, ki sta še dobri za novo bazo: S_1 in S_2
Imamo stanje oblike: $|SS_zS_1S_2\rangle$
S1 in S2 imata v kombinacijah enake vrednosti, zato bomo pisali z komponente.
Za stanje $\left|\frac{5}{2}\frac{5}{2}\right\rangle$ ima samo eno možnost → obe komponenti maksimalni

$$\left|\frac{5}{2}\frac{5}{2}\right\rangle = |1\rangle\left|\frac{3}{2}\right\rangle$$

Kateri operator znižuje $\frac{5}{2}$ v $\frac{3}{2}$?
Kaj naredi S_-: $\quad S_-|SS_z\rangle = \hbar\sqrt{S(S+1) - S_z(S_z - 1)}\,|SS_z - 1\rangle$
Vzeti bomo morali operator $S_- = S_{1-} + S_{2-}$, ki zmanjšuje projekcijo spina za 1.

$$S_-\left|\frac{5}{2}\frac{5}{2}\right\rangle = (S_{1-} + S_{2-})|1\rangle\left|\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$S_-\left|\frac{5}{2}\frac{5}{2}\right\rangle = \hbar\sqrt{\frac{5}{2}\frac{7}{2} - \frac{5}{2}\frac{3}{2}}\left|\frac{5}{2}\frac{3}{2}\right\rangle = \hbar\sqrt{\frac{35}{4} - \frac{15}{4}}\left|\frac{5}{2}\frac{3}{2}\right\rangle = \hbar\sqrt{5}\left|\frac{5}{2}\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$(S_{1-}+S_{2-})|1\rangle\left|\frac{3}{2}\right\rangle=(S_{1-}|1\rangle)\left|\frac{3}{2}\right\rangle+|1\rangle\left(S_{2-}\left|\frac{3}{2}\right\rangle\right)=$$
$$=\hbar\sqrt{1\cdot 2-1\cdot 0}\,|0\rangle\left|\frac{3}{2}\right\rangle+|1\rangle\hbar\sqrt{\frac{3}{2}\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\frac{1}{2}}\left|\frac{1}{2}\right\rangle=$$
$$=\hbar\sqrt{2}\,|0\rangle\left|\frac{3}{2}\right\rangle+\hbar\sqrt{3}\,|1\rangle\left|\frac{1}{2}\right\rangle$$
$$\left|\frac{5}{2}\frac{5}{2}\right\rangle=|1\rangle\left|\frac{3}{2}\right\rangle$$
$$\left|\frac{5}{2}\frac{3}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{5}}|0\rangle\left|\frac{3}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{3}{5}}|1\rangle\left|\frac{1}{2}\right\rangle$$

Dobili smo stanje stare baze izraženo s stanjem v novi bazi. To smo storili s pomočjo znane izražave stanja z enako vrednostjo celotnega spina in za 1 večjo vrednostjo projekcije spina. Na to znano stanje smo delovali z operatorjem S_- v obeh bazah. S ponavljanjem postopka lahko dobimo 4 ostala stanja, ki imajo projekcijo spina manjšo.

Kaj pa stanje $\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle$? Sestavimo ga lahko iz stanj $\left|0\frac{3}{2}\right\rangle in \left|1\frac{1}{2}\right\rangle$.

Mora biti normalizirano in ortogonalno na stanje $\left|\frac{5}{2}\frac{3}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{5}}|0\rangle\left|\frac{3}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{3}{5}}|1\rangle\left|\frac{1}{2}\right\rangle$

Iz pogoja ortogonalnosti dobimo koeficiente takole:
Zamenjamo koeficienta in enemu spremenimo predznak:

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}=-ab+ab=0$$
$$\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{3}{5}}|0\rangle\left|\frac{3}{2}\right\rangle-\sqrt{\frac{2}{5}}|1\rangle\left|\frac{1}{2}\right\rangle$$

Tudi ostala 3 stanja s celotnim spinom $\left|\frac{3}{2}\right\rangle$ dobimo z delovanjem operatorja S_- na stanja v stari in novi bazi.

Vidimo da lahko stanje $\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$ sestavimo iz: $|-1\rangle\left|\frac{3}{2}\right\rangle, |0\rangle\left|\frac{1}{2}\right\rangle in |1\rangle\left|-\frac{1}{2}\right\rangle$

$$\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle=A|-1\rangle\left|\frac{3}{2}\right\rangle+B|0\rangle\left|\frac{1}{2}\right\rangle+C|1\rangle\left|-\frac{1}{2}\right\rangle$$

Koeficiente stanja $\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$ dobimo iz pogoja ortogonalnosti na stanji $\left|\frac{5}{2}\frac{1}{2}\right\rangle in \left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$. Za stanji $\left|\frac{5}{2}\frac{1}{2}\right\rangle in \left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$ bi dobili:

$$\left|\frac{5}{2}\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{1}{10}}|-1\rangle\left|\frac{3}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{3}{5}}|0\rangle\left|\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{3}{10}}|1\rangle\left|-\frac{1}{2}\right\rangle$$
$$\left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{5}}|-1\rangle\left|\frac{3}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{1}{15}}|0\rangle\left|\frac{1}{2}\right\rangle-\sqrt{\frac{8}{15}}|1\rangle\left|-\frac{1}{2}\right\rangle$$

Koeficienti za prehode med bazama so že izračunani in zloženi v tabelo Clebsch-Gordanovih koeficientov.

$\frac{3}{2}\times 1$		$\frac{5}{2}$ $\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$ $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$
$\frac{3}{2}$	1	1		
$\frac{3}{2}$	0		$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{1}{2}$	1		$\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$

Iz tabele samo preberemo koeficiente razvoja, ki nas zanimajo. Zapisane koeficiente samo korenimo, negativen predznak pa postavimo pred koren.

$$\left|\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}\,|0\rangle\left|\frac{3}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}\,|1\rangle\left|\frac{1}{2}\right\rangle$$

Nazaj k spinom:

nastavek: $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle |SS_z\rangle$

$$H = \frac{p^2}{2m} - \lambda\delta(x)\frac{1}{2}(S^2 - S_1^2 - S_2^2)$$

$$\frac{1}{2}(S^2 - S_1^2 - S_2^2)|SS_z\rangle = \frac{1}{2}\left(\hbar^2 S(S+1) - 2\hbar^2 - \hbar^2\frac{15}{4}\right)|SS_z\rangle = \frac{1}{2}\hbar^2\left(S(S+1) - 2 - \frac{15}{4}\right)|SS_z\rangle$$

$$S^2|SS_z\rangle = \hbar^2 S(S+1)|SS_z\rangle$$

Koliko je vezanih stanj?

Vezana stanja imamo za predfaktorje >0.

Poglejmo vrednosti $S(S+1) - 2 - \frac{15}{4}$ pri različnih S:

$$S = \frac{5}{2}: \qquad \frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2} - 2 - \frac{15}{4} = 3$$

$$S = \frac{3}{2}: \qquad \frac{15}{4} - 2 - \frac{15}{4} = -2$$

$$S = \frac{1}{2}: \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} - 2 - \frac{15}{4} = -5$$

Pri vrednosti $S = \frac{5}{2}$: imamo 6 različnih projekcij spina: $\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$

Stanje je 6x degenerirano, zato imamo 6 vezanih stanj.