Heisenbergov princip nedoločenosti

Kvantna mehanika I

naloga

Gregor Traven
Astronomsko geofizikalna smer
28030377

marec 2008

NALOGA

Radi bi izpeljali produkt nedoločenosti dveh splošnih operatorjev A in B. Predpostavili bomo da sta operatorja hermitska ter uporabili nekaj pravil, ki bodo sproti razložena. Zanima nas torej vrednost $\delta A \delta B$.

Če je operator A sebi hermitsko adjungiran ali na kratko **hermitski**, potem velja

$$A^\dagger = A$$
$$\langle \Psi_1 | A \Psi_2 \rangle = \langle A^\dagger \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \langle A \Psi_1 | \Psi_2 \rangle.$$

Nedoločenost količine (operatorja) A je definirana kot

$$\delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle}.$$

Definirajmo nova operatorja

$$A' = A - \langle A \rangle \quad \text{ter} \quad B' = B - \langle B \rangle$$

in pokažimo da sta, upoštevajoč $\langle A \rangle^* = \langle A \rangle$, tudi ta dva hermitska:

$$\langle \Psi | A' | \Psi \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle - \langle \Psi | \langle A \rangle | \Psi \rangle = \langle A \Psi | \Psi \rangle - \langle \langle A \rangle^* \Psi | \Psi \rangle.$$

Zdaj se lahko lotimo izpeljave našega produkta nedoločenosti. Začeli bomo s kvadriranjem izraza.

$$(\delta A)^2 (\delta B)^2 = \langle A'^2 \rangle \langle B'^2 \rangle = \langle \Psi | A'^2 | \Psi \rangle \langle \Psi | B'^2 | \Psi \rangle = \langle A' \Psi | A' | \Psi \rangle \langle B' \Psi | B' | \Psi \rangle$$

Ob upoštevanju Cauchy-Schwarzove neenakosti lahko za zgornji izraz zapišemo

$$\langle A' \Psi | A' | \Psi \rangle \langle B' \Psi | B' | \Psi \rangle = \langle A' \Psi | A' \Psi \rangle \langle B' \Psi | B' \Psi \rangle \geq |\langle A' \Psi | B' \Psi \rangle|^2 = |\langle \Psi | A' B' \Psi \rangle|^2 \qquad (1)$$

$A'B'$ lahko zapišemo z dekompozicijo produkta kot

$$A'B' = \frac{A'B' + B'A'}{2} + \frac{A'B' - B'A'}{2} = \frac{\{A', B'\}}{2} + \frac{[A', B']}{2}$$

kjer je $[A', B']$ **komutator** ter $\{A', B'\}$ **antikomutator**.

Poglejmo kaj se zgodi če komutator in antikomutator hermitsko adjungiramo. Na tem mestu uporabimo zvezo za hermitiranje produkta $(A, B)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

$$\{A', B'\}^\dagger = (A'B')^\dagger + (B'A')^\dagger = B'^\dagger A'^\dagger + A'^\dagger B'^\dagger = B'A' + A'B' = \{A', B'\}$$

$\Longrightarrow$ antikomutator je hermitski

$$[A', B']^\dagger = (A'B')^\dagger - (B'A')^\dagger = B'^\dagger A'^\dagger - A'^\dagger B'^\dagger = B'A' - A'B' = -[A', B']$$

$\Longrightarrow$ komutator je antihermitski ($C^\dagger = -C$) kjer velja

$$\langle C \rangle = \langle \Psi | C | \Psi \rangle = -\langle C \Psi | \Psi \rangle = -\langle \Psi | C \Psi \rangle^* = \langle C \rangle^* \quad \Rightarrow \quad \text{C je čisto imaginarno število}$$

Ob upoštevanju zgornjih relacij nadaljujemo izpeljavo iz (1)

$$(\delta A)^2 (\delta B)^2 \geq |\langle \Psi | A' B' \Psi \rangle|^2 = \left| \langle \Psi | \frac{1}{2} \left(\{A', B'\} + [A', B'] \right) \Psi \rangle \right|^2 =$$

$$= \left| \left\langle \Psi \left| \frac{\{A', B'\}}{2} \Psi \right. \right\rangle + \left\langle \Psi \left| \frac{[A', B']}{2} \Psi \right. \right\rangle \right|^2 \geq \left| \left\langle \Psi \left| \frac{[A', B']}{2} \Psi \right. \right\rangle \right|^2 = \left| \left\langle \Psi \left| \frac{[A, B]}{2} \Psi \right. \right\rangle \right|^2$$

Upoštevali smo še izraz

$$[A', B'] = [A - \langle A \rangle, B - \langle B \rangle] = [A, B] - [A, \langle B \rangle] - [\langle A \rangle, B] + [\langle A \rangle, \langle B \rangle]$$

v katerem je od nič različen le prvi člen, saj sta pričakovani vrednosti operatorjev A in B števili, ki komutirata tako s poljubnim operatorjem kot med seboj. Velja torej $[A', B'] = [A, B]$.

Na koncu lahko zapišemo končno obliko Heisenbergovega načela nedoločenosti kot

$$\delta A \delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle \Psi \left| [A, B] \right. \Psi \rangle \right|^2 .$$