Teorija motenj

Jože Buh

14. maj 2008

Imamo harmonski oscilator. Hamiltonovo funkcijo harmonskega oscilatorja spremenimo z dodatnim členom $V = Cx^4$. Izračunajmo energije vezanih stanj!

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} + Cx^4; \quad C > 0$$

Energija vezanih stanj nespremenjenega harmonskega oscilatorja je:

$$E_n^0 = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$$

Energijo našega oscilatorja zapišemo kot energijo nezmotenega oscilatorja E_n^0 plus popravek v prvem redu $E_n^{(1)}$:

$$E_n = E_n^0 + E_n^{(1)}$$

$$V = Cx^4$$

$$E_n^{(1)} =< n|V|n >=< n|cx^4|n >= C < n|x^4|n >= C < x^2n|x^2|n >$$

Zgoraj smo uporabili dejstvo da je x^2 hemitski operator. Operatorja x in x^2 lahko z anihilacijskim operatorjem zapišem kot:

$$x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(a^+ + a)$$

$$x^2 = \frac{x_0^2}{2}(a^+a^+ + a^+a + aa^+ + aa),$$

kar vstavimo v zgornji nastavek za popravek in računamo:

$$x^2|n >= C\frac{x_0^2}{2}\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}|n+2> +n|n> +(n+1)|n> +\sqrt{n(n-1)}|n-2>\right)$$

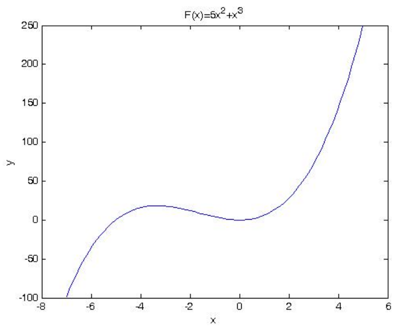
$$C < X^2n|x^2n >= C\frac{x_0^4}{4}\left[(n+1)(n+2) + (n^2 + 2n(n+1) + (n+1)^2) + n(n-1)\right] =$$

$$= C\frac{x_0^4}{4}(6n^2 + 6n + 3)$$

Imejmo sedaj zopet zmoten harmonski oscilator z motnjo $V = Cx^3$:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} + Cx^3$$

Oblika potenciala je narisana na sliki. Ker je x^3 liha funkcija bo popravek v prvem



redu enak nič ($E_n^{(1)} = 0$). Izračunamo popravek k energiji v drugem redu $E_n^{(2)}$:

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m\,|V|\,n\rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0}$$

$$\left\langle m \left| Cx^3 \right| n \right\rangle = C \left\langle xm|x^2 n \right\rangle$$

Zopet smo uporabili dejstvo da je x hermitski operator.

$$x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(a^+ + a)$$

S prejšnega dela naloge prepišemo vrednost $x^2|n>$

$$x^2|n >= (\sqrt{(n+1)(n+2)}|n+2> + (2n+1)|n> + \sqrt{n(n-1)}|n-2>)\frac{x_0^2}{2}$$

izračunamo še $x|m>$

$$x|m >= \frac{x_0}{\sqrt{2}}(\sqrt{m+1}|m+1> + \sqrt{m}|m-1>)$$

Izračunajmo sedaj:

$$C < xm|x^2 n >= C\frac{x_0}{\sqrt{8}}\left(\sqrt{(n+1)(n+2)(m+1)}\underbrace{< n+2|m+1 >}_{\delta_{n+1,m}} + \right.$$

$$\sqrt{(n+1)(n+2)m}\delta_{n+3,m} + (2n+1)\sqrt{m+1}\delta_{n-1,m} + (2n+1)\sqrt{m}\delta_{n+1,m} +$$

$$\left.\sqrt{n(n-1)(m+1)}\delta_{n-3,m} + \sqrt{n(n-1)m}\delta_{n-1,m}\right) =$$

$$= C\frac{x_0^3}{\sqrt{8}}\left(\sqrt{n(n-1)(n-2)}\delta_{n-3,m} + 3n\sqrt{n}\delta_{n-1,m} + 3(n+1)\sqrt{n+1}\delta_{n+1,m}\right.$$
$$\left. + \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\delta_{n+3,m}\right)$$

Sedaj ko imamo izračunan matrični element lahko izračunamo popravek k energiji:

$$E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n} \frac{|\langle m\,|V|\,n\rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0} =$$

$$= C^2\frac{x_0^6}{8}\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{3\hbar\omega} + \frac{9n^3}{\hbar\omega} - \frac{9(n+1)^3}{\hbar\omega} - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3\hbar\omega}\right) =$$
$$= -C^2\frac{x_0^6}{8\hbar\omega}(30n^2 + 30n + 11)$$