KVANTNA MEHANIKA I
Vrtilna količina IV

Enej Ilievski (28030560)
email: enej.ilievski@student.fmf.uni-lj.si

14. maj 2008

1 NALOGA

Delec z vrtilno količino $l = 1$, ki se giblje v krogelno simetričnem potencialu, je v stanju $m = 1$. Ob $t = 0$ vklopimo homogeno magnetno polje v ravnini yz pod kotom Φ glede na os z. Kakšna je časovna odvisnost pričakovane vrednosti velikosti vrtilne količine?

2 REŠITEV

Zanima nas $< L(t) >$ po vklopu magnetnega polja v ravnini yz.

Kot vselej, začnemo s Hamiltonijanom sistema

$$H = \frac{p^2}{2m} - \vec{\mu}\vec{B}.$$

Ker nas kinetični del ne zanima, pošljemo $m \to \infty$ (težek delec) in postavimo os z' koordinatnega sistema S' vzporedno z magnetnim poljem. To se v sistemu S' torej zapiše kot $B = (0, 0, B_0)$. Upoštevamo še $\vec{\mu} = \gamma\vec{L}$ in dobimo

$$H = -\gamma L_{z'} B_0.$$

Ob vklopu polja smo se iz prvotnega koordinatnega sistema S preselili v koordiantni sistem S', kjer ima Hamiltonov operator "lepo" obliko. To nam bo, kot bomo kasneje videli, bistveno olajšalo računsko delo.

Sedaj je potrebno poiskati lastne funkcije nezmotenega sistema in sistema po vklopu polja. Pokazati se da, da v primeru, ko je Hamiltonijan oblike $H = \frac{p^2}{2m} + V(r)$, velja

$$[H, L^2] = [H, L_z] = 0,$$

kar pomeni, da obstajajo stanja, ki so lastna vsem trem operatorjem. Take funkcije so sferični harmoniki $< \theta\phi|lm >= Y_{lm}(\theta, \phi)$. Spomnimo se še enkrat kakšna so lastna stanja in lastne funkcije za operatorja L^2 in L_z:

$$L_z|lm >= \hbar m|lm >$$

$$L^2|lm >= \hbar l(l + 1)|lm >$$

Bolj priročno za računanje je, če uvedemo operatorja $L_+ = L_x + iL_y$ in $L_- = L_x - iL_y$ ter upoštevamo

$$L_\pm|lm >= \hbar\sqrt{l(l + 1) - m(m \pm 1)}|l, m \pm 1 > .$$

Lastna stanja pred vklopom polja so torej sferične funkcije, ki jih podamo s kvantima številoma l (velikost vrtilne količine) ter m (projekcija na izbrano os). Pišemo jih kot $|lm>$. Po vklopu polja so take lastne funkcije še vedno dobre, vendar imamo sedaj zaradi drugačne postavitve koordinatnega sistema drugačne projekcije na osi. Velikost vrtilne količine se seveda pri transformaciji sistema ne spremeni. Stanja v S' tako pišemo kot $|lm>'$.

Sedaj smo pripravljeni, da se spustimo v reševanje problema. Po navodilu naloge zapišemo stanje sistema ob času $t = 0$ kot $|11>$. Tedaj velja

$$L_z|11>=\hbar|11> . \tag{1}$$

Nato vklopimo magnetno polje. Ker znamo časovni razvoj izvršiti le v sistemu S' (še enkrat naj poudarim, da to storimo zato, ker je v tem sistemu energija podana preprosto preko vrednosti projekcije na smer polja; $H = -\gamma L_{z'} B_0$), bo potrebno operator L_z zapisati kot kombinacijo operatorjev $L_{x'}$, $L_{y'}$ in $L_{z'}$.

$$L_z = aL_{z'} + bL_{x'} + cL_{y'} = \cos\Phi L_{z'} - \sin\Phi L_{y'}$$

Upoštevali smo, da je smer polja pod kotom Φ glede na z os v yz ravnini.
Stanje $|11>$ razvijemo po bazi S':

$$|11>=\sum_{-l\leq m\leq l} C_m|lm>',$$

$$|11>= C_{-1}|1-1>' + C_0|10>' + C_1|11>'$$

Iz enačbe (1) ob upoštevanju $L_{y'} = \frac{L'_+ - L'_-}{2i}$ dobimo

$$\left(-\hbar - \sin\Phi\frac{L_+ - L_-}{2i} + \cos\Phi L_{z'}\right)[C_{-1}|1-1>' + C_0|10>' + C_1|11>'] = 0 \tag{2}$$

Treba je dobiti koefciente razvoja C_{-1}, C_0 ter C_1. Preden se zapodimo v računski del naloge, si še pripravimo teren:

$$L_{y'}|1-1>'=\hbar\frac{\sqrt{2}}{2i}|10>'$$

$$L_{y'}|10>'=\hbar\left(\frac{\sqrt{2}}{2i}|11>' - \frac{\sqrt{2}}{2i}|1-1>'\right)$$

$$L_{y'}|11>'=-\hbar\frac{\sqrt{2}}{2i}|10>'$$

Ko delujemo z zgornjimi operatorji na lastna stanja na desni strani enačbe (2) dobimo enačbo za koeficiente

$$C_{-1}\left[-\hbar|1-1>' + i\hbar\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\Phi|10>' - \hbar\cos\Phi|1-1>'\right] +$$
$$C_0\left[-\hbar|10>' + i\hbar\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\Phi(|11>' - |1-1>')\right] +$$
$$C_1\left[-\hbar|11>' - i\hbar\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\Phi|10>' + \hbar\cos\Phi|11>'\right] = 0$$

Sedaj na to enačbo delujemo z baznimi funkcijami $< 1-1|'$, $< 10|'$ in $< 11|'$, da dobimo sistem treh enačb za koeficiente C_{-1}, C_0 in C_1.

$$-\hbar C_{-1} - i\hbar\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\Phi C_0 - \hbar\cos\Phi C_{-1} = 0$$
$$i\hbar\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\Phi C_{-1} - \hbar C_0 - i\hbar\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\Phi C_1 = 0$$
$$-\hbar C_1 + i\hbar\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\Phi C_0 + \hbar\cos\Phi C_1 = 0$$

Iz prve enačbe takoj dobimo $C_{-1} = -i\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sin\Phi}{1+\cos\Phi}C_0$, iz tretje pa $C_1 = i\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sin\Phi}{1-\cos\Phi}$. Da velja tudi druga enačba preverimo tako, da vanjo vstavimo pravkar dobljena koeficienta.

Imamo torej

$$|11>= -i\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sin\Phi}{1+\cos\Phi}C_0|1-1>' + C_0|10>' + i\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sin\Phi}{1-\cos\Phi}C_0|11>' .$$

C_0 dobimo iz normalizacije valovne funkcije.

$$C_0^2\left[1+\frac{1}{2}\frac{\sin^2\Phi}{(1-\cos\Phi)^2}+\frac{1}{2}\frac{\sin^2\Phi}{(1+\cos\Phi)^2}\right] = 1 \Rightarrow C_0 = \frac{\sin\Phi}{\sqrt{2}}$$

Upoštevajoč zvezo $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{2}$ lahko rezultat zapišemo v lepši obliki kot

$$|11>= -i\sin^2\frac{\Phi}{2}|1-1>' + \sqrt{2}\sin\frac{\Phi}{2}\cos\frac{\Phi}{2}|10>' + i\cos^2\frac{\Phi}{2}|11>' .$$

Za časovni razvoj moramo poznati lastne vrednosti energij stanj $|lm>'$. Nahajamo se v taki bazi, da je to trivialno:

$$H|lm>' = -\gamma B_0 L_{z'}|lm>' = -\gamma B_0\hbar m|lm>'$$
$$|11,t>= \sin^2\frac{\Phi}{2}|1-1>'\, e^{-i\gamma B_0 t - i\frac{\pi}{2}} + \sqrt{2}\sin\frac{\Phi}{2}\cos\frac{\Phi}{2}|10>' + \cos^2\frac{\Phi}{2}|11>'\, e^{i\gamma B_0 t + i\frac{\pi}{2}}$$

Naloga sprašuje po pričakovani vrednosti velikosti vrtilne količine:

$$< L'(t) >=< 11,t|L(t)|11,t>= \sqrt{2}\hbar\left(\sin^4\frac{\Phi}{2}+2\sin^2\frac{\Phi}{2}\cos^2\frac{\Phi}{2}+\cos^4\frac{\Phi}{2}\right) = \sqrt{2}\hbar =< L_{t=0} >$$

Upoštevali smo $L|lm>' = \hbar\sqrt{l(l+1)}|lm>'$. Velikost vrtilne količine se torej s časom ohranja! To nas ne preseneča, saj vemo, da je $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ ter $\vec{M} = \vec{\mu}\times\vec{B}$. Navor magnetnega polja deluje pravokotno na vrtilno količino. To pomeni, da le-ta precedira okrog smeri magnetnega polja.

Podobno lahko izračunamo še $< L_{z'}(t) >=< 11,t|L_{z'}(t)|11,t>$, pri čemer uporabimo $L_{z'}|lm>' = \hbar m|lm>$. Rezultat je $< L_{z'} >= \hbar\cos\Phi$. Pričakovani vrednosti ostalih dveh projekcij dobimo kot $< L_{x'} >= Re < L'_+ >$ oziroma $< L_{y'} >= Im < L'_+ >$.

$$Re < 11,t|L'_+|11,t>= -\hbar\sin\Phi\sin\gamma B_0 t$$
$$Im < 11,t|L'_+|11,t>= -\hbar\sin\Phi\cos\gamma B_0 t$$