

Koherentna stanja harmonskega oscilatorja

Ana Dergan

26. marec 2008

1 Koherentno stanje

Koherentno stanje je lastno stanje anihilacijskega operatorja:

$$a|z\rangle = z|z\rangle, \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{lastna vrednost.} \quad (1)$$

Poiščemo ga tako, da ga razvijemo po lastnih stanjih Hamiltonovega operatorja:

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad c_n = \langle n|z\rangle \quad (2)$$

Na enačbo (1) od leve delujemo z $\langle n|$:

$$\begin{aligned} \langle n|a|z\rangle &= z\langle n|z\rangle \\ \langle a^\dagger n|z\rangle &= z\langle n|z\rangle \\ \sqrt{n+1}\langle n+1|z\rangle &= z\langle n|z\rangle \\ \sqrt{n+1}c_{n+1} &= zc_n \\ c_n &= \frac{z^n}{\sqrt{n!}}c_0 \end{aligned} \quad (3)$$

Dobili smo rekurzijsko zvezo za koeficiente razvoja. c_0 določimo iz normalizacijskega pogoja:

$$\begin{aligned} \langle z|z\rangle &= 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |c_0|^2 |z^n|^2 \langle n|n\rangle &= 1 \\ |c_0|^2 e^{|z|^2} &= 1 \\ |c_0| &= e^{-\frac{|z|^2}{2}} = c_0 \end{aligned}$$

Koeficiente vstavimo v razvoj (2):

$$|z\rangle = \sum e^{-\frac{|z|^2}{2}} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (4)$$

2 Časovni razvoj koherentnega stanja

Ker smo naredili razvoj po lastnih stanjih Hamiltonovega operatorja, dobimo časovni razvoj enostavno tako, da vsakemu členu pritaknemo faktor $e^{-iE_n t/\hbar}$.

$$|z, t\rangle = \sum e^{-\frac{|z|^2}{2}} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} |n\rangle$$

Izraz $|z|$ smemo zamenjati z $|ze^{-i\omega t}|$, ker je $|e^{-i\omega t}| = 1$. Gornjo vsoto še malo preoblikujemo:

$$|z, t\rangle = e^{-i\omega t/2} \sum \frac{1}{\sqrt{n!}} (ze^{-i\omega t})^n e^{-|ze^{-i\omega t}|^2/2}$$

Če primerjamo dobljeni izraz s (4) ugotovimo, da je tudi $|z, t\rangle$ koherentno stanje. Njegova lastna vrednost je $ze^{-i\omega t}$.

3 Pričakovane vrednosti: $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle p^2 \rangle$ in ustrezne nedoločenosti

Najprej si izpeljemo zvezo, ki nam bo koristila pri vseh nadaljnjih izračunih.

$$\langle z | a^{\dagger n} a^m | z \rangle = \langle a^n z | a^m z \rangle = (z^n)^* z^m \langle z | z \rangle = (z^n)^* z^m \quad (5)$$

Operatorje bomo izrazili z a in a^\dagger :

$$x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger)$$

$$x^2 = \frac{x_0^2}{2}(a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger + a a + a a^\dagger)$$

Za izračun $\langle a a^\dagger \rangle$ si s (5) ne moremo pomagati, zato $a a^\dagger$ izrazimo s pomočjo komutatorja: $a a^\dagger = 1 + a^\dagger a$. S pomočjo (5) tako dobimo:

$$\langle x \rangle = \langle z | x | z \rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(z^* + z) = x_0 \sqrt{2} \operatorname{Re}(z)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{x_0^2}{2}(2z^* z + z^{*2} + z^2 + 1) = \frac{x_0^2}{2}((z + z^*)^2 + 1) = \frac{x_0^2}{2}((2\operatorname{Re}(z))^2 + 1)$$

Izračunamo še nedoločenost:

$$\delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}$$

Pogledamo si še nedoločenost gibalne količine.

Najprej izrazimo gibalno količino in njen kvadrat z operatorjema a in a^\dagger :

$$p = p_0 \frac{1}{\sqrt{2}i}(a - a^\dagger)$$

$$p^2 = -\frac{p_0^2}{2}(a^2 - a a^\dagger - a^\dagger a + a^{\dagger 2})$$

Zdaj lahko izračunamo $\langle p \rangle$ in $\langle p^2 \rangle$:

$$\langle p \rangle = p_0 \frac{1}{\sqrt{2}i}(z - z^*) = \sqrt{2} p_0 \operatorname{Im}(z)$$

$$\langle p^2 \rangle = -\frac{p_0^2}{2}(z^2 - 1 - 2z^* z + z^{*2}) = -\frac{p_0^2}{2}((z - z^*)^2 - 1) = 2p_0^2 \operatorname{Im}(z)^2 + \frac{p_0^2}{2}$$

Nedoločenost gibalne količine je:

$$\delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \frac{p_0}{\sqrt{2}}$$

Na koncu izračunamo produkt nedoločenosti koordinate x in gibalne količine:

$$\delta x \delta p = \frac{1}{2} p_0 x_0.$$

Ker med p_0 in x_0 obstaja povezava $p_0 = \frac{\hbar}{x_0}$, je produkt nedoločenosti ravno $\hbar/2$. V eni izmed prejšnjih nalog pa smo dokazali, da ima najmanjši možen produkt nedoločenosti koordinate in gibalne količine valovna funkcija Gaussove oblike. Tako smo pokazali, da je koherentno stanje harmonskega oscilatorja:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x_0^2 \pi}} \exp\left(-\frac{(x - \sqrt{2} x_0 \operatorname{Re}(z))^2}{2x_0^2}\right) \exp\left(\frac{i\sqrt{2} p_0 \operatorname{Im}(z) x}{\hbar}\right)$$