Časovno odvisna perturbacija VI

Luka Jeromel

14. maj 2008

1 Naloga

Imamo delec s spinom 1/2, ki je ob času $t = 0$ v stanju $|\uparrow\rangle$. Je v homogenem magnetnem polju B_z v smeri osi z. Ob času $t = 0$ vklopimo šibko magnetno polje v smeri osi x z velikostjo: $B_x(t) = B_x \frac{t}{\tau}$. Zanima nas kakšna je valovna funkcija ob času $t = \tau$.

2 Rešitev

Hamiltonova funkcija takšnega delca je

$$H = \frac{g\mu_B}{\hbar}(\vec{S} \cdot \vec{B})$$

Ker vemo da je $\vec{B} = (B_x \frac{t}{\tau}, 0, B_z)$ in $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ lahko izvedemo skalarni produkt in dobimo:

$$H = \frac{g\mu_B}{\hbar}(B_x \frac{t}{\tau} S_x + B_z S_z) \tag{1}$$

Ker je polje v x smeri mnogo manjše od polja v z smeri bomo za določitev valovne funkcije našega delca $| \psi, t\rangle$ uporabili perturbacijsko teorijo. Najprej označimo:

$$H_0 = \frac{g\mu_B}{\hbar} B_z S_z$$

Sedaj je hamiltonova funkcija v obliki:

$$H = H_0 + V(t)$$

Poglejmo najprej kaj naredi operator H_0 na valovni funkciji lastnih stanj delca.

$$H_0 \,|\uparrow\rangle = \frac{g\mu_B}{\hbar} B_z \frac{\hbar}{2} \,|\uparrow\rangle = \hbar\omega_z \,|\uparrow\rangle$$

$$H_0 \left|\downarrow\right\rangle = -\frac{g\mu_B}{\hbar} B_z \frac{\hbar}{2} \left|\downarrow\right\rangle = -\hbar\omega_z \left|\downarrow\right\rangle$$

Označili smo $\omega_z \hbar = \frac{g\mu_B B_z}{2}$.

Časovni razvoj funkcij lastnih stanj je torej:

$$\left|\uparrow, t\right\rangle = \left|\uparrow\right\rangle \exp\left(-i\frac{E_\uparrow}{\hbar}t\right) = \left|\uparrow\right\rangle \exp\left(-i\omega_z t\right)$$
$$\left|\uparrow, t\right\rangle = \left|\downarrow\right\rangle \exp\left(-i\frac{E_\downarrow}{\hbar}t\right) = \left|\downarrow\right\rangle \exp\left(i\omega_z t\right)$$

Lastna stanja tvorijo ortogonalno bazo z dimenzijo dve. Zato lahko poljubno valovno funkcijo delca s spinom ena polovica razvijemo pa lastnih stanjih. Torej je:

$$\left|\ \psi, t\right\rangle = C_\uparrow(t) \left|\uparrow, t\right\rangle + C_\downarrow(t) \left|\uparrow, t\right\rangle$$

Iz teorije perturbacij dobimo enačbe za koeficiente v razvoju:

$$C_\uparrow(t) = C_\uparrow(0) - \frac{i}{\hbar}\int_0^t \left\langle\uparrow, t \mid V(t) \mid \uparrow, t\right\rangle dt \tag{2}$$
$$C_\downarrow(t) = C_\downarrow(0) - \frac{i}{\hbar}\int_0^t \left\langle\downarrow, t \mid V(t) \mid \uparrow, t\right\rangle dt \tag{3}$$

Če hočemo izračunati koeficienta v razvoju moramo najprej izračunati matrična elementa. Zato bomo sedaj pogledali kaj naredi operator $V(t)$ na vsaki lastni funkciji posebej. Izrazimo S_x z operatorjema S_+ in S_-.

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$$

Izračunajmo sedaj tole:

$$V(t) \left|\uparrow, t\right\rangle = \frac{g\mu_B}{\hbar 2}\frac{t}{\tau} B_x (S_+ + S_-) \left|\uparrow, t\right\rangle$$
$$= \frac{g\mu_B}{\hbar 2}\frac{t}{\tau} B_x \left|\downarrow\right\rangle \exp\left(-i\omega_z t\right)$$

Pomnožimo najprej to z brajem $\left\langle\uparrow, t\ \right|$, da dobimo matrični element za izračun prvega koeficienta v razvoju. Ker sta funkciji $\left|\uparrow\right\rangle$ in $\left|\downarrow\right\rangle$ ortogonalni, je ta matrični element enak nič. Če upoštevamo še začetni pogoj $C_\uparrow(0) = 1$, dobimo za prvi koeficint enko.

Sedaj pomnožimo to še z drugim brajem $\left\langle\downarrow, t\ \right|$, upoštevamo še začetni pogoj $C_\downarrow(0) = 0$ in dobimo:

$$\left\langle\downarrow, t \mid V(t) \mid \uparrow, t\right\rangle = \frac{g\mu_B}{2\hbar} B_x \frac{t}{\tau} \exp\left(-2i\omega_z t\right) = \hbar\omega_x \frac{t}{\tau} \exp\left(-2i\omega_z t\right) \tag{4}$$

Vpeljali smo novo konstanto ω_x.

Izračunajmo sedaj koeficient $C_\downarrow$ ob času τ:

$$C_\downarrow(\tau) = 0 - i\omega_x \int_0^\tau \frac{t}{\tau} \exp\left(-i2\omega_z t\right) dt$$

To preoblikujemo v brezdimenzijsko obliko ,tako da vpeljemo novo spremenljivko $u = -i2\omega_z t$. Upoštevamo tole zvezo $\int e^u u du = (u-1)e^u$ in dobimo:

$$C_\downarrow(\tau) = \frac{i\omega_x}{4\omega_z^2 \tau}(1 - (1 + 2i\omega_z\tau)\exp\left(-i2\omega_z\tau\right))$$

Sedaj lahko zapišemo valovno funkcijo našega delca v magnetnem polju:

$$\mid \psi, t\rangle = \mid\uparrow\rangle \exp\left(-i\omega_z\tau\right) + \frac{i\omega_x}{4\omega_z^2\tau}(1 - (1 + 2i\omega_z\tau)\exp\left(-i2\omega_z\tau\right)) \mid\downarrow\rangle \exp\left(i\omega_z\tau\right)$$

Valovno funkcijo lahko zmeraj pomnožimo z nekim kompleksnim številom, ki ima absolutno vrednost ena, in s tem ne spremenimo njene vloge. Še zmeraj predstavlja enak delec v istem potencialu. Zato bomo našo funkcijo pomnožili z faktorjem $\exp\left(-i\omega_z\tau\right)$ in jo s tem vsaj malce polepšali:

$$\begin{aligned}\mid \psi, \tau\rangle &= \mid\uparrow\rangle + \frac{i\omega_x}{4\omega_z^2\tau}(1 - (1 + 2i\omega_z\tau)\exp\left(-i2\omega_z\tau\right)) \mid\downarrow\rangle \exp\left(2i\omega_z\tau\right) \\ &= \mid\uparrow\rangle + \frac{i\omega_x}{4\omega_z^2\tau}(\exp\left(2i\omega_z\tau\right) - (1 + 2i\omega_z\tau)) \mid\downarrow\rangle\end{aligned}$$

To funkcijo bi radi primerjali z funkcijo:

$$\mid \psi\rangle = cos(\frac{\vartheta}{2}) \mid\uparrow\rangle + sin(\frac{\vartheta}{2})e^{i\varphi} \mid\downarrow\rangle$$

Tako bomo ugotovili, v katero smer je usmerjen spin delca v našem potencialu. Ker je to nekoliko pretežka naloga si jo bomo poenostavili in bomo pogledali samo dva limitna primera.

2.1 $\omega_z\tau \ll 1$

Ta primer predstavlja situacijo, ko magnetno polje v x smeri vklopimo v zelo kratekem času. V tem primeru je v eksponentu zelo majhno število, zato ga lahko razvijemo $\exp\left(2i\omega_z\tau\right) = 1 + 2i\omega_z\tau$ in dobimo:

$$\mid \psi, \tau\rangle = \mid\uparrow\rangle + \frac{i\omega_x}{4\omega_z^2\tau}(1 + 2i\omega_z\tau - (1 + 2i\omega_z\tau) + ost.(\omega_z\tau)^2) \mid\downarrow\rangle$$

$$\mid \psi, \tau\rangle = \mid\uparrow\rangle$$

Vidimo, da če je sprememba zelo kratka se s spinom nič ne zgodi.

2.2 $\omega_z\tau \gg 1$

$$| \psi, \tau\rangle = |\uparrow\rangle + \frac{i\omega_x}{4\omega_z^2\tau}(\exp{(2i\omega_z\tau)} - (1 + 2i\omega_z\tau))\, |\downarrow\rangle \tag{5}$$

V drugem koeficientu sedaj zanemarimo vse člene, razen člena $-i2\omega_z\tau$.

$$| \psi, \tau\rangle = |\uparrow\rangle + \frac{\omega_x}{2\omega_z}\, |\downarrow\rangle$$

Sedaj izračunamo kota

$$e^{i\varphi} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi = 0$$

$$sin(\frac{\vartheta}{2}) = \frac{\omega_x}{2\omega_z} \qquad \Longrightarrow \qquad \vartheta \simeq \frac{\omega_x}{\omega_z}$$

Kot ϑ je ravno kot med vsoto z osjo in skupnim magnetnim poljem $\vec{B}$, torej je smer spina enaka smeri magnetnega polja.