

Valovni paket II

Jure Grbec
13. marec 2008

Naloga:

Izračunaj časovni razvoj valovnega paketa za delec, ki se giblje v konstantnem potencialu in časovno odvisnost verjetnostne gostote.

Rešitev:

Če začnemo s poljubno valovno funkcijo $|\psi\rangle = \sum_k C_k |\psi_k\rangle$, lahko njen časovni

razvoj zapišemo kot: $|\psi, t\rangle = \sum_k C_k |\psi_k\rangle e^{-i\frac{E_k}{\hbar}t}$ Pri tem je $E_k = \frac{\hbar k^2}{2m} = \frac{\langle p \rangle^2}{2m}$.

Vsoto lahko zaradi zveznosti zapišemo tudi kot integral. Tako pridemo do uporabne oblike:

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{4\sigma^2}} e^{ikx} e^{-i\frac{k^2}{2m}t} dk$$

C_k lahko izračunamo tako, da izračunamo $\Psi(x, 0)$.

$$\Psi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx} dk$$

Pozorni bralec prepozna v tej enačbi Fourierovo transformacijo, tako lahko preprosto izračunamo C_k z inverzno Fourierovo transformacijo:

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, 0) e^{ikx} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{4\sigma^2}} e^{ikx} dx \end{aligned}$$

Integral lahko izračunamo in pridemo do:

$$C_k = \sqrt[4]{\frac{\sigma^2}{2\pi^3}} e^{-k^2 \sigma^2} = \sqrt[4]{\frac{\sigma^2}{2\pi^3}} e^{-\frac{\langle p \rangle^2}{\hbar^2} \sigma^2}$$

Vstavimo vse v $\Psi(x, t)$ in dobimo:

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt[4]{\frac{\sigma^2}{2\pi^3}} e^{-\frac{\langle p \rangle^2}{\hbar^2} \sigma^2} e^{i\langle p \rangle x} e^{-i\frac{\langle p \rangle^2}{2m\hbar} t} d\frac{\langle p \rangle}{\hbar} = \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2} \sqrt{1 + i\frac{\hbar}{2m\sigma^2} t}} e^{\frac{(ix + 2\sigma^2 \frac{\langle p \rangle}{m})^2}{4\sigma^2 (1 + i\frac{\hbar}{2m} t)} - \frac{\sigma^2 \langle p \rangle^2}{m^2}} \end{aligned}$$

To je časovno razvit valovni paket v končni obliki. Od tu lahko izpeljemo časovno odvisnost verjetnostne gostote.

$$|\Psi(x, t)|^2 = |A|^2 e^{2 \operatorname{Re}(B)}$$

Kjer je

$$\begin{aligned} |A|^2 &= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2} \sqrt{1 + i\frac{\hbar}{2m\sigma^2} t} \sqrt{1 - i\frac{\hbar}{2m\sigma^2} t}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar}{2m\sigma^2} t\right)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Re}(B) &= 2 \operatorname{Re} \left(\frac{(ix + 2\sigma^2 \frac{\langle p \rangle}{m})^2}{4\sigma^2 (1 + i \frac{\hbar}{2m} t)} - \frac{\sigma^2 \langle p \rangle^2}{m^2} \right) = \\
&= \frac{-(x - \frac{\langle p \rangle}{m} t)^2}{2\sigma^2 (1 + \frac{\hbar^2}{2m^2 \sigma^4})}
\end{aligned}$$

Na koncu dobimo :

$$|\Psi(x, t)|^2 = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar}{2m\sigma^2} t\right)^2}} e^{-\frac{(x - \frac{\langle p \rangle}{m} t)^2}{2\sigma^2 (1 + \frac{\hbar^2}{2m^2 \sigma^4})}}$$