Valovni paket II

Jure Grbec
13. marec 2008

Naloga:

Izračunaj časovni razvoj valovnega paketa za delec, ki se giblje v konstantnem potencialu.

Rešitev:

Če začnemo s poljubno valovno funkcijo $|\psi\rangle = \sum_k C_k\,|\psi_k\rangle$, lahko njen časovni razvoj zapišemo kot: $|\psi, t\rangle = \sum_k C_k e^{-i\frac{E_k}{\hbar}t}|\psi_k\rangle$ Pri tem je $E_k = \frac{\hbar k^2}{2m}$. Vsoto lahko zaradi zveznosti zapišemo tudi kot integral. Tako pridemo do uporabne oblike:

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx} e^{-i\frac{E_k}{\hbar}t}\,dk \quad |\psi,t\rangle = \sum_k C_k e^{-i\frac{E_k}{\hbar}t|\psi_k\rangle}$$

C_k lahko izračunamo tako, da izračunamo $\Psi(x,0)$.

$$\Psi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx}\,dk$$

Pozorni bralec prepozna v tej enačbi Fourierevo transformacijo, tako lahko preprosto izračunamo C_k z inverzno Fourierevo transformacijo:

$$C_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,0) e^{-ikx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} e^{-ikx}\,dx$$

Integral lahko izračunamo in pridemo do:

$$C_k = \sqrt[4]{\frac{\sigma^2}{2\pi^3}} e^{-k^2\sigma^2}$$

Vstavimo vse v $\Psi(x,t)$ in dobimo:

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt[4]{\frac{\sigma^2}{2\pi^3}} e^{-k^2\sigma^2} e^{ikx} e^{-i\frac{\hbar^2 k^2}{\hbar 2m}t} dk =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{\sigma^2}{2\pi^3}} e^{-\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{k^2(-\sigma^2 - i\frac{h}{2m}t) + ikx} dk =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}\sqrt{1 + i\frac{\hbar}{2m\sigma^2}t}} e^{\frac{-\frac{x^2}{4}}{\sigma^2 + i\frac{\hbar}{2m}t}}$$