KVANTNA MEHANIKA 1
Vrtilna količina 3

Klemen Strniša 28030574
Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

21. april 2008

Povzetek

Imamo delec v stanju

$$\psi(\mathbf{r}) = Ax^2 e^{-\lambda r}$$

in nas zanima naslednje

- s kolikšno verjetnostjo izmerimo delcu projekcijo vrtilne količine enako 0
- kakšne so možne vrednosti pri merjenju kvadrata vrtilne količine in s kakšno verjetnostjo izmerimo posamezno
- a kolikšno verjetnostjo izmerimo projekcijo vrtilne količine enako 0, če smo prej izmerili njen kvadrat

I. RAZVOJ

V kvantni mehaniki so fizikalne količine predstavljene z operatorji, in ko neko fizikalno količino izmerimo, kot rezultat meritve vedno dobimo eno od lastnih vrednosti operatorja. Če imamo delec v nekem poljubnem stanju, predstavlja kvadrat koeficient v razvoju po lastnih funkcijah verjetnost, da bomo delcu izmerili lastno vrednost tega stanja.

Zato, če nas zanima katere vrednosti vrtilne količine lahko izmerimo, in s kakšno verjetnostjo, moramo naše dano stanje razviti po lastnih funkcijah. Te so za vrtilno količino krogelne funkcije(spherical harmonics).

$$Y_{l,m} \qquad l = 1, 2, 3 \ldots \qquad -l \leq m \leq l$$

Obstaja izrek(baje), ki pravi da so za razvoj potence x^n(enako za y in z) potrebne le funkcije z $l \leq n$, kar nam močno olajša računanje.

Prvih nekaj lastnih funkcij(tiste ki jih potrebujemo) v koordinatni reprezentaciji in krogelnih koordinatah

$$\begin{aligned}
Y_{00} &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\
Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \\
Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \, e^{i\varphi} \\
Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1) \\
Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \, \cos\theta \, e^{i\varphi} \\
Y_{22} &= \sqrt{\frac{5}{32\pi}} \sin^2\theta \, e^{2i\varphi}
\end{aligned}$$

lastne funkcije za negativne m dobimo tako da upoštevamo relacijo

$$Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{l,m}^*$$

Vse kar ostane zdaj je, da valovno funkcijo za naše štartno stanje dobro pogledamo in razvijemo. V krogelnih koordinatah je valovna funkcija

$$\psi(r,\theta,\varphi) = Ar\sin^2\theta\,\cos^2\theta\,e^{-\lambda r}$$

in ker se lastne funkcije po katerih razvijamo tičejo le kotnega dela, moramo razviti le del

$$\sin^2\theta\,\cos^2\theta$$

To naredimo tako da bolj ostro pogledamo funkciji Y_{22} in Y_{2-2}, ki sta si kompleksno konjugiran par, in ju seštejemo

$$\begin{aligned}
Y_{22} + Y_{2-2} &= 2Re[Y_{22}] = \\
&= \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin^2\theta\,\cos 2\varphi = \\
&= \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin^2\theta\,(\cos^2\theta\, - \sin^2\theta) = \\
&\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin^2\theta\,(2\cos^2\theta - 1) = \\
&= \sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\,\cos^2\theta - \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin^2\theta
\end{aligned}$$

To že zgleda skoraj v redu. Prvi člen je do konstante že natanko to kar hočemo, le še drugi člen bi morali znati razviti da bi ga lahko odšteli. Za tega hitro vidimo da se skriva v funkciji Y_{20}

$$\begin{aligned}
Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1) = \\
&= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(2 - 3\sin^2\theta) = \\
&= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} - \sqrt{\frac{45}{16\pi}}\sin^2\theta
\end{aligned}$$

Drugi člen je že to kar potrebujemo, odšteti je treba le še konstanto, ki pa se skriva v funkciji Y_{00}.

Naš razvoj je tako

$$|\psi\rangle = C(|2\,2\rangle + |2\;-2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|2\,0\rangle + \sqrt{\frac{10}{3}}|0\,0\rangle)$$

kjer konstanto C hitro določimo iz normalizacije

$$C = \sqrt{\frac{3}{18}}$$

Tako je

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{3}{18}}|2\,2\rangle + \sqrt{\frac{3}{18}}|2\ -2\rangle - \sqrt{\frac{2}{18}}|2\,0\rangle + \sqrt{\frac{10}{18}}|0\,0\rangle$$

II. POVPREČNE VREDNOSTI

Iz razvoja takoj vidimo odgovora na prvi dve vprašanji. Verjetnost da izmerimo projekcijo vrtilne količine 0 je vsota kvadratov koeficientov pred tistimi stanji v razvoju, ki imajo takšno projekcijo.

$$P(l_z = 0) = \frac{2}{18} + \frac{10}{18} = \frac{2}{3}$$

Za kvadrat vrtilne količine so možni izmerki $l^2 = 0,\ 6\hbar^2$ in ustrezne verjetnosti.

$$P(l^2 = 0) = \frac{5}{9}$$
$$P(l^2 = 6\hbar^2) = \frac{4}{9}$$

Če najprej za kvadrat vrtilne količine izmerimo neko vrednost, smo odstranili iz razvoja vse člene, ki nimajo takšnega kvadrata velikosti. Tistih, ki pa imajo ustrezno velikost, pa se operator ne dotakne in se ohrani njihovo razmerje, le normalizacija se popravi. Tako če smo izmerili kvadrat vrtilne količine 0 imamo stanje

$$|\psi\rangle = |0\,0\rangle$$

in z verjetnostjo $P = 1$ izmerimo projekcijo enako 0. Če pa izmerimo kvadrat $6\hbar^2$ pa imamo po meritvi stanje

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{3}{8}}|2\,2\rangle + \sqrt{\frac{3}{8}}|2\ -2\rangle - \sqrt{\frac{2}{8}}|2\,0\rangle$$

in projekcijo 0 izmerimo z verjetnostjo $P = \frac{1}{4}$.