Domača naloga- kvantna mehanika 1

Jure Senegačnik

26. februar 2008

Imamo delec v δ potencialu.

$$V(x) = -\lambda\delta(x)$$

Izračunaj vezana stanja!

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x)dx = 1$$

Zaradi simetrije (sodosti) so lastne funkcije (rešitve) spet bodisi sode bodisi lihe. Ker išemo vezana stanja, je energija manjša od potenciala, torej E<0

SODE REŠITVE:

$$\psi = Ae^{-nx} + Be^{nx}$$

Za x $>$ 0 je B = 0, sicer funkcija ne bi bila normalizirana. Rešitev je bodisi soda, bodisi liha.

$$n = \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2m(-E)}{\hbar^2}}$$

Saj je V = 0 skoraj povsod.

$$\psi_1(x) = Ae^{nx} = Ae^{\sqrt{\frac{2m(-E)}{\hbar^2}}x}$$

To je rešitev Schrödingerjeve enačbe (spodaj) za $\forall x < 0$, se pravi levo od „delta špice“.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi = E\psi$$

Desno od le te ($x > 0$) pa je rešitev Schrödingerjeve enačbe:

$$\psi_2(x) = Ae^{-nx} = Ae^{-\sqrt{\frac{2m(-E)}{\hbar^2}}x}$$

Ker imamo δ potencial je ψ zvezna, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ pa ne.

ROBNI POGOJI:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\psi dx = 1 \tag{2}$$

$$\psi_2'(0) - \psi_1'(0) = \frac{2m}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{\infty} V(x)\psi(x)dx = \frac{2m}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{\infty} -\lambda\delta(x)\psi dx = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\psi(0) \tag{3}$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial x} = -Ane^{-nx}; \frac{\partial\psi_1}{\partial x} = Ane^{nx}$$

$$\psi_2(0) - \psi_1(0) = -An - An = -2An = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\psi(0)$$

$$n = \frac{m\lambda}{\hbar^2}$$

$$E = -\frac{m\lambda^2}{2\hbar^2}$$

Iz normalizacije sledi $A = \sqrt{n}$

$$\psi(x) = \sqrt{n}e^{-n|x|}; n = \frac{m\lambda}{\hbar}$$

Lihih rešitev ni.

Ali delec krši Heisenbergovo načelo nedoločenosti?

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Nedoločenost lege se izračuna:

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

Povprečna lega:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \psi dx = 0$$

ker sem liho funkcijo integriral na sodem intervalu.
Povprečen kvadrat lege:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x^2 \psi dx = 2\int_{0}^{\infty} ne^{-2nx}x^2 dx =$$

Pri funkciji sem izrabil njeno sodost. Zdaj še uvedem novo spremenljivko: $u = 2nx$, $du = 2ndx$.

$$= 2\int_0^{\infty} \frac{u^2e^{-u}du}{4n^2} = \frac{\Gamma(3)}{4n^2} = \frac{2!}{4n^2} = \frac{1}{2n^2}$$

Izračunati moram še nedoločenost gibalne količine. Začnem s povprečjem gibalne količine.

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})\psi dx = 0,$$

ker integriram liho funkcijo po sodem intervalu. Nadaljujem z

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2})\psi dx$$

Najprej izračunajmo odvod

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\sqrt{n}ne^{-n|x|}sign(x)$$

kjer je sign(x) funkcija, ki je -1 za negativne x in 1 za pozitivne x, pri 0 pa je 0. Izračunamo še drugi odvod:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = n^{\frac{3}{2}}ne^{-n|x|}sign(x) - n^{\frac{3}{2}}e^{-n|x|}2\delta(x)$$

Saj je sign(x)=2H(x)-1 in njen odvod torej $2\delta(x)$. Zdaj to vstavimo v izraz za $< p^2 >$ in dobimo:

$$\langle p^2\rangle = \int_0^\infty (-\hbar^2)n^2e^{-2nx} - 2(-\hbar^2)\int_{-\infty}^\infty n^2e^{-2n|x|}\delta(x)dx$$

Uvedemo novo spremenljivko u = 2nx -> du =2 n dx

$$= \hbar^2(\int_0^\infty e^{-u}du - 2n^2e^0) = n^2\hbar^2$$

$\langle p^2\rangle$ pa se da dobiti tudi po lažji poti. Vemo, da je

$$H = T + V$$

kjer je T kinetična energija $T = \frac{p^2}{2m}$

$$\langle\hat{H}\rangle = \frac{\langle p^2\rangle}{2m} + \langle V(x)\rangle$$

Vemo, da je H seštevek kinetične in potencialne energije, se pravi nekakšna skupna energija delca. Ker ima delec lahko v takem potencialu le eno možno energijo, ki smo jo prej označili z E, mora veljati $H = E$.

$$-\frac{m\lambda^2}{2\hbar^2} = \frac{\langle p^2\rangle}{2m} + \int_{-\infty}^\infty -\lambda\delta(x)ne^{-2n|x|}dx$$

$$-\frac{m\lambda^2}{2\hbar^2} = \frac{\langle p^2\rangle}{2m} - \lambda n = \frac{\langle p^2\rangle}{2m} - \frac{m\lambda^2}{\hbar^2}$$

$$\frac{\langle p^2\rangle}{2m} = \frac{m\lambda^2}{2\hbar^2}$$

$$\langle p^2\rangle = \frac{m^2\lambda^2}{\hbar^2} = n^2\hbar^2$$

Zdaj pa to vstavimo v Heisenbergovo neenačbo in poglejmo, da ne dobimo česa premajhnega:

$$\frac{\hbar}{2} \leq \Delta x\Delta p = \frac{n\hbar}{\sqrt{2}n} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}$$

Vidimo, da je produkt nedoločenosti za faktor $\sqrt{2}$ večji od minimalnega dovoljenega.