Domača naloga- kvantna mehanika 1

Jure Senegačnik

22. februar 2008

Imamo delec v δ potencialu.

$$V(x) = -\lambda\delta(x)$$

Izračunaj vezana stanja!

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x)dx = 1$$

Zaradi simetrije (sodosti) so funkcije (rešitve) spet bodisi sode bodisi lihe. Ker išemo vezana stanja, je energija manjša od potenciala, torej E<0

SODE REŠITVE:

$$\psi = Ae^{-nx} + Be^{nx}$$

Za x $>$ 0 je B $=$ 0, sicer funkcija ne bi bila normalizirana. Rešitev je bodisi soda, bodisi liha.

$$n = \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2m(-E)}{\hbar^2}}$$

Saj je V $=$ 0 skoraj povsod.

$$\psi_1(x) = Ae^{nx} = Ae^{\sqrt{\frac{2m(-E)}{\hbar^2}}}$$

To je rešitev Schrödingerjeve enačbe (spodaj) za $\forall x > 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi = E\psi$$

Ker imamo δ potencial je ψ zvezna, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ pa ne.

ROBNI POGOJI:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\psi dx = 1 \tag{2}$$

$$\psi_2'(0) - \psi_1'(0) = \frac{2m}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{\infty} V(x)\psi(x)dx = \frac{2m}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{\infty} -\lambda\delta(x)\psi dx = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\psi(0) \tag{3}$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial x} = -Ane^{-nx}; \frac{\partial\psi_1}{\partial x} = Ane^{nx}$$

$$\psi_2(0) - \psi 1(0) = -An - An = -2An = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\psi(0)$$

$$n = \frac{m\lambda}{\hbar^2}$$

$$E = -\frac{m\lambda^2}{2\hbar^2}$$

Iz normalizacije sledi $A = \sqrt{n}$

$$\psi(x) = \sqrt{n}e^{-n|x|}; n = \frac{m\lambda}{\hbar}$$

Lihih rešitev ni.

Ali delec krši Heisenbergovo načelo nedoločenosti?

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Povprečna nedoločenost lege se izračuna:

$$\Delta x = \sqrt{< x^2 > - < x >^2}$$

Povprečna lega:

$$< x >= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \psi dx = 0$$

ker sem liho funkcijo integriral na sodem intervalu.
Povprečen kvadrat lege:

$$< x^2 >= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x^2 \psi dx = 2\int_0^{\infty} ne^{-2nx}x^2 dx =$$

Pri funkciji sem izrabil njeno sodost. Zdaj še uvedem novo spremenljivko: $u = 2nx$, $du = 2ndx$.

$$= 2\int_0^{\infty} \frac{u^2 e^{-u} du}{4n^2} = \frac{\Gamma(3)}{4n^2} = \frac{2!}{4n^2} = \frac{1}{2n^2}$$

Izračunati moram še nedoločenost gibalne količine. Začnem s povprečjem gibalne količine.

$$< p >= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})\psi dx = 0,$$

ker integriram liho funkcijo po sodem intervalu. Nadaljujem z

$$< p^2 >= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2})\psi dx$$

Najprej izračunajmo odvod

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\sqrt{n}ne^{-n|x|}sign(x)$$

kjer je sign(x) funkcija, ki je -1 za negativne x in 1 za pozitivne x, pri 0 pa je 0. Izračunamo še drugi odvod:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = n^{\frac{3}{2}} n e^{-n|x|} sign(x) - n^{\frac{3}{2}} e^{-n|x|} 2\delta(x)$$

Saj je sign(x)=2H(x)-1 in njen odvod torej $2\delta(x)$. Zdaj to vstavimo v izraz za $< p^2 >$ in dobimo:

$$< p^2 >= \int_0^\infty (-\hbar^2) n^2 e^{-2nx} - 2(-\hbar^2) \int_{-\infty}^\infty n^2 e^{-2n|x|} \delta(x) dx$$

Uvedemo novo spremenljivko u = 2nx -> du =2 n dx

$$= \hbar^2 (\int_0^\infty e^{-u} du - 2n^2 e^0) = n^2 \hbar^2$$

$< p^2 >$ pa se da dobiti tudi po lažji poti. Vemo, da je

$$H = T + V$$

kjer je T kinetična energija $T = \frac{p^2}{2m}$

$$< \hat{H} >= \frac{p^2}{2m} + < V(x) >$$

$$-\frac{m\lambda^2}{2\hbar^2} = \frac{< p^2 >}{2m} + \int_{-\infty}^\infty -\lambda \delta(x) n e^{-2n|x|} dx$$

$$-\frac{m\lambda^2}{2\hbar^2} = \frac{< p^2 >}{2m} - \lambda n = \frac{< p^2 >}{2m} - \frac{m\lambda^2}{\hbar^2}$$

$$\frac{< p^2 >}{2m} = \frac{m\lambda^2}{2\hbar^2}$$

$$< p^2 >= \frac{m^2\lambda^2}{\hbar^2} = n^2\hbar^2$$

Zdaj pa to vstavimo v Heisenbergovo neenačbo in poglejmo, da ne dobimo česa premajhnega:

$$\frac{\hbar}{2} \leq= \Delta x \Delta p = \frac{n\hbar}{\sqrt{2}n} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}$$

Vidimo, da je produkt nedoločenosti za faktor $\sqrt{2}$ večji od minimalnega dovoljenega.