

Kvantna mehanika I – vaje

Perturbacija IV

Andraž Krajnc

8. maj 2008

Oceni popravek energije osnovnega stanja izotropnega dvodimenzionalnega harmonskega oscilatorja

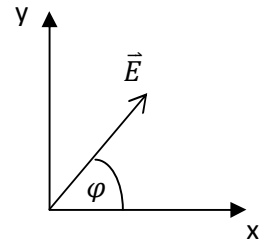
$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}k\vec{r}^2$$

v homogenem zunanjem električnem polju. Uporabi najnižji red teorije motnje, ki da netrivialne rezultate.

Rešitev:

Zaradi homogenega električnega polja je v našem primeru potencial $V = -eE\vec{r}$.

$$H = \underbrace{\frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2}_{H_{x0}} - \underbrace{eE \cos \varphi \cdot x + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}ky^2}_{V_x} - eE \sin \varphi \cdot y$$



Če naredimo rotacijo koordinatnega sistema za kot φ , si bomo olajšali računanje popravkov energije. V splošnem namreč $|\langle m|V_x + V_y|n \rangle|^2$ ni enak le $|\langle m|V_x|n \rangle|^2 + |\langle m|V_y|n \rangle|^2$, temveč dobimo še mešana člena $|\langle m|V_x V_y|n \rangle|$ in $|\langle m|V_y V_x|n \rangle|$.

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 - eEx + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}ky^2$$

Lastne energije za naš harmonski oscilator v homogenem magnetnem polju so:

$$E_n = E^{(0)} + E^{(1)} + E^{(2)}$$

osnovna energija
popravka

Za harmonski oscilator so osnovne energije:

$$E_n^{(0)} = \hbar\omega(n_x + n_y + 1)$$

Računanje prvega popravka

$$E_n^{(1)} = \langle n_x | V | n_x \rangle = \langle n_x | -eEx | n_x \rangle$$

$$x = x_0 \frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}} - \text{Pri izračunu uporabimo operator lege.}$$

$$E_n^{(1)} = -eE \frac{x_0}{\sqrt{2}} \langle n_x | a + a^\dagger | n_x \rangle = -eE \frac{x_0}{\sqrt{2}} (\sqrt{n_x} \langle n_x | n_x - 1 \rangle + \sqrt{n_x + 1} \langle n_x | n_x + 1 \rangle)$$

$$\text{ker } \langle n_x | n_x - 1 \rangle = 0 \text{ in } \langle n_x | n_x + 1 \rangle = 0, E_n^{(1)} = 0.$$

Računanje drugega popravka

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | V | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

$$\begin{aligned} \langle m_x | V | n_x \rangle &= \langle m_x | -eE \cos \varphi \cdot x | n_x \rangle = -eE \frac{x_0}{\sqrt{2}} \langle m_x | a + a^\dagger | n_x \rangle \\ &= -eE \frac{x_0}{\sqrt{2}} (\sqrt{n_x} \langle m_x | n_x - 1 \rangle + \sqrt{n_x + 1} \langle m_x | n_x + 1 \rangle) \end{aligned}$$

$\langle m_x | n_x - 1 \rangle$ in $\langle m_x | n_x + 1 \rangle$ lahko zapišemo z deltami.

$$\langle m_x | V | n_x \rangle = -eE \frac{x_0}{\sqrt{2}} (\sqrt{n_x} \delta_{m_x, n_x - 1} + \sqrt{n_x + 1} \delta_{m_x, n_x + 1})$$

$$|\langle m_x | V | n_x \rangle|^2 = e^2 E^2 \frac{x_0^2}{2} (n_x \delta_{m_x, n_x - 1} + (n_x + 1) \delta_{m_x, n_x + 1})$$

Zgornji izraz bo različen od nič le, ko bo a) $m_x = n_x - 1$ oz. b) $m_x = n_x + 1$!

- a) $E_n^{(0)} - E_m^{(0)} = E_n^{(0)} - E_{n-1}^{(0)} = \hbar\omega \left(n_x + \frac{1}{2} \right) - \hbar\omega \left(n_x - 1 + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega$
b) $E_n^{(0)} - E_m^{(0)} = E_n^{(0)} - E_{n+1}^{(0)} = \hbar\omega \left(n_x + \frac{1}{2} \right) - \hbar\omega \left(n_x + 1 + \frac{1}{2} \right) = -\hbar\omega$

Drugi popravek je torej:

$$\begin{aligned} E_n^{(2)} &= \sum_{m \neq n} \frac{e^2 E^2 \frac{x_0^2}{2} (n_x \delta_{m_x, n_x - 1} + (n_x + 1) \delta_{m_x, n_x + 1})}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} = \frac{e^2 E^2 \frac{x_0^2}{2} n_x}{\hbar\omega} + \frac{e^2 E^2 \frac{x_0^2}{2} (n_x + 1)}{-\hbar\omega} \\ &= -\frac{e^2 E^2 x_0^2}{2\hbar\omega} \end{aligned}$$

Lastne energije so torej:

$$E_n = \hbar\omega(n_x + n_y + 1) - \frac{e^2 E^2 \cos^2 \varphi \cdot x_0^2}{2\hbar\omega} - \frac{e^2 E^2 \sin^2 \varphi \cdot x_0^2}{2\hbar\omega} = \underline{\underline{\hbar\omega(n_x + n_y + 1) - \frac{e^2 E^2 x_0^2}{2\hbar\omega}}}$$