

$$\Psi_1(x) = B \cos kx \quad \text{za sode}$$

$$\Psi_1(x) = A \sin kx \quad \text{za lihe}$$

$$\Psi_2(x) = \tilde{A} e^{\tilde{k}x} + \tilde{B} e^{-\tilde{k}x}$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \tilde{k} = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \quad E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}$$

Funkcija Ψ mora biti na robu zvezna in zvezno odvedljiva

$$\text{Polimo: } \left. \begin{aligned} \Psi_1\left(\frac{a}{2}\right) &= \Psi_2\left(\frac{a}{2}\right) & B \cos k \frac{a}{2} &= \tilde{B} e^{-\tilde{k} \frac{a}{2}} & A \sin k \frac{a}{2} &= \tilde{A} e^{-\tilde{k} \frac{a}{2}} \\ \Psi_1'\left(\frac{a}{2}\right) &= \Psi_2'\left(\frac{a}{2}\right) & -Bk \sin k \frac{a}{2} &= -\tilde{B} \tilde{k} e^{-\tilde{k} \frac{a}{2}} & Ak \cos k \frac{a}{2} &= -\tilde{A} \tilde{k} e^{-\tilde{k} \frac{a}{2}} \end{aligned} \right\}$$

Po deljenju obeh pogojev za sode in lihe funkcije dolimo dve enačbi

$$k \operatorname{tg}\left(k \frac{a}{2}\right) = \tilde{k}$$

$$k \operatorname{ctg}\left(k \frac{a}{2}\right) = -\tilde{k}$$

Uvedemo novi spremenljivki, $ka = x$
 $\tilde{k}a = \tilde{x}$

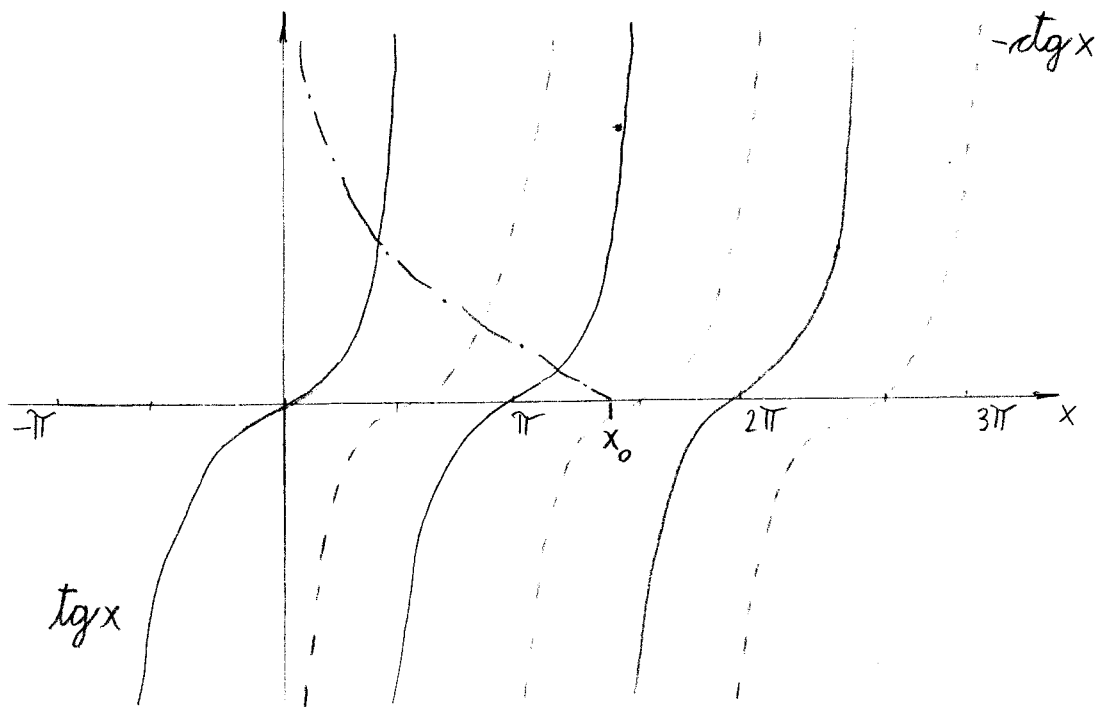
$$x^2 + \tilde{x}^2 = \frac{2mEa^2}{\hbar^2} + \frac{2m(V_0 - E)a^2}{\hbar^2} = \frac{2ma^2V_0}{\hbar^2} = x_0^2$$

Naši enačbi se tako predelata v:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{x_0^2}{x^2} - 1} \quad \text{za sode}$$

$$-\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{x_0^2}{x^2} - 1} \quad \text{za lihe}$$

Rešitvi poiščemo grafično.



Iz skice vidimo, da rešitev za sodo funkcijo vedno obstaja.
 Pogoj za obstoj prvega vzlujenega stanja je $x_0^2 > \pi^2$ iz česar
 sledi $\frac{2ma^2V_0}{\hbar^2} > \pi^2$ in dalje $V_0 > \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$

Pogledajmo kaj se zgodi če potencial V_0 pošljemo proti ∞ .

$$V_0 \rightarrow \infty$$

$$x_0 \rightarrow \infty$$

Vrhovi v grafu se premaknejo k $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$

$$x = n\pi$$

$$\sqrt{\frac{2mEa^2}{\hbar^2}} = n\pi$$

$$E = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

Rezultat ustreza vezanim stanjem neskončne potencialne jame

Poglejmo si še limitni primer, ko gre $a \rightarrow 0$, pri čemer upoštevamo $av_0 = \text{konst.}$

Naša jama je δ funkcija.

$$\text{tg } \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{x_0^2}{x^2} - 1}$$

\Downarrow_0

x je malo manjši kot x_0 .

$$x = x_0 - \epsilon$$

$$\text{tg } \frac{x_0 - \epsilon}{2} = \frac{x_0 - \epsilon}{2} = \sqrt{\frac{x_0^2}{(x_0 - \epsilon)^2} - 1} = \sqrt{1 + \frac{2\epsilon}{x_0} - 1} = \sqrt{\frac{2\epsilon}{x_0}}$$

$$\frac{x_0}{2} = \sqrt{\frac{2\epsilon}{x_0}}$$

$$\epsilon = \left(\frac{x_0}{2}\right)^3$$

$$E = \frac{\hbar^2 x^2}{2ma^2} = \frac{\hbar^2 (x_0 - (\frac{x_0}{2})^3)^2}{2ma^2} = \frac{\hbar^2 (x_0^2 - \frac{1}{4} x_0^4)}{2ma^2} = V_0 - \frac{ma^2 V_0^2}{2\hbar^2}$$