Sipanje na končni potencialni jami II

Mitja Krnel

6. marec 2008

Naloga:

Obravnavaj prepustnost pri sipanju na potencialni jami širine a in globine V_0 v limiti $\sqrt{\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}} \gg 1$.

1. Pokaži, da ima prepustnost pri energijah malo nad robom potencialne jame resonance, ki jih lahko opišemo z Lorentzovo krivuljo.

2. Pokaži, da ima amplituda za prepustnost pole pri energijah $E_n - i\frac{\Gamma_n}{2}$, kjer so E_n in Γ_n energije in širine resonanc v prepustnosti. Kakšna lastna stanja ustrezajo tem polom?

3. Kako sta povezana razpadni čas kvazivezanega stanja in širina ustrezne resonance?

Potencial je tak kot pri prejšnji nalogi:

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{za } |x| \leq \frac{a}{2}, \\ 0 & \text{za } |x| > \frac{a}{2}. \end{cases}$$

Potencial obravnavamo v primeru, ko je $x_0 = \sqrt{\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}} \gg 1$.

1. Računamo obliko prepustnosti T(E) za sipanje na potencialni jami in širino resonanc v T(E).

Za izračun oblike T(E) potrebujemo izraz: [1]

$$\frac{F}{A} = \frac{e^{-ika}}{\cos k'a - \frac{i}{2}(\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k}) \sin k'a} \tag{1}$$

Prepustnost za valovanje, ki prihaja z leve strani je v tem primeru enaka:

$$T = \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}(\frac{k'}{k} - \frac{k}{k'})^2 \sin^2 k'a} \tag{2}$$

kjer sta $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ valovni vektor izven jame in

$k' = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$ valovni vektor v jami,

E pa je energija lastnega stanja.

[1] Izraza (1) in (2) sta bila izpeljana na vajah dne 28.2.2008

Resonance imamo tam, kjer je T = 1, torej pri $\sin^2 k'a = 0 \Rightarrow k'a = n\pi$.

Zaradi lažjega računanja uvedemo brezdimenzijski količini $x = ka$ in $x' = k'a$.

Zanima nas obnašanje prepustnosti v bližini resonančnega vrha, zato vzamemo $x' = n\pi + \varepsilon$, kjer je $\varepsilon \ll n\pi$.

Tak x' vstavimo v enačbo (1) in člene razvijemo v Taylorjevo vrsto do prvega reda:

$$\cos k'a = \cos(n\pi + \varepsilon) = \cos n\pi \cos\varepsilon - \sin n\pi \sin\varepsilon = \tag{3}$$

$$= (-1)^n \cos\varepsilon \approx (-1)^n (1 - \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \tag{4}$$

Upoštevali smo: $\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \cdots$

Podobno je: $\sin k'a = \sin(n\pi + \varepsilon) = \sin n\pi \cos\varepsilon + \cos n\pi \sin\varepsilon =$

$$= (-1)^n \sin\varepsilon \approx (-1)^n (\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3)) \tag{5}$$

Upoštevali smo: $\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \cdots$

Člena e^{-ika} ne rabimo razvijat, ker je $|e^{-ika}| = 1$.

Člen $(\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k})$ razvijemo samo do ničtega reda. Če bi ga razvili do prvega reda, bi zaradi $\sin k'a$, ki smo ga tudi razvili do prvega reda, dobili popravke drugega reda, ki pa jih zanemarimo.

Člen $(\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k})$ zapišemo z energijami:

$(\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k}) = \frac{\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}}{\sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}} + \frac{\sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}}{\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}} = \sqrt{\frac{E}{E+V_0}} + \sqrt{\frac{E+V_0}{E}}$

Naša potencialna jama naj bo globoka, energija pa naj bo tik nad robom pot. jame. To pomeni, da bo $V_0 \gg E$. Ko to upoštevamo, dobimo:

$(\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k}) \approx \sqrt{\frac{E+V_0}{E}}$

Energijo n-te resonance E_n dobimo tako, da iz enačbe za k' izrazimo E in upoštevamo $x' = n\pi$:

$E + V_0 = k'^2 \frac{\hbar^2}{2m} = (\frac{x'}{a})^2 \frac{\hbar^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2} \Rightarrow$

$E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2} - V_0$

Zato, da izraz poenostavimo, vpeljemo z izrazom $V_0 = \frac{\hbar^2 n_0^2 \pi^2}{2ma^2}$ novo količino n_0:

$E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2} - \frac{\hbar^2 n_0^2 \pi^2}{2ma^2}$

n_0 šteje število vezanih stanj v pot. jami, vendar ni nujno celo število. Če dobimo npr. $n_0 = 99.3$, imamo 99 vezanih stanj, 100-to stanje pa je nad potencialom $V = 0$.

Potem velja:

$$(\frac{k}{k'}+\frac{k'}{k})\approx\sqrt{\frac{\frac{\hbar^2 n^2\pi^2}{2ma^2}}{\frac{\hbar^2 n^2\pi^2}{2ma^2}-\frac{\hbar^2 n_0^2\pi^2}{2ma^2}}}=\sqrt{\frac{n^2}{n^2-n_0^2}} \tag{6}$$

V enačbo (1) zdaj vstavimo vse popravke do 1. reda in dobimo:

$$\frac{F}{A}=\frac{e^{-ika}}{(-1)^n-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{n^2}{n^2-n_0^2}}\,(-1)^n\,\varepsilon} \tag{7}$$

Zdaj namesto $x'=n\pi$ v izraz za energijo E vstavimo $x'=n\pi+\varepsilon$:

$E=\frac{(n\pi+\varepsilon)^2\,\hbar^2}{2ma^2}-V_0\Rightarrow$

$E=\frac{(n^2\pi^2+2n\pi\varepsilon+\varepsilon^2)\,\hbar^2}{2ma^2}-V_0$

Ko zanemarimo člen z ε^2, dobimo:

$E=E_n+\frac{n\pi\varepsilon\hbar^2}{ma^2}\Rightarrow\varepsilon=\frac{(E-E_n)\,ma^2}{n\pi\hbar^2}$

Tak ε vstavimo v enačbo za $\frac{F}{A}$, $(-1)^n$ ne povzroča problemov, ker $|(-1)^n|=1\Rightarrow$

$$\frac{F}{A}=\frac{e^{-ika}(-1)^{-n}}{1-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{n^2}{n^2-n_0^2}}\frac{ma^2}{n\pi\hbar^2}(E-E_n)} \tag{8}$$

Vpeljemo novo količino Γ_n, tako da je:

$$\frac{F}{A}=\frac{e^{-ika}(-1)^{-n}}{1-\frac{2i(E-E_n)}{\Gamma_n}}. \tag{9}$$

Ko primerjamo enačbi (8) in (9), dobimo:

$$\Gamma_n=\frac{4\pi\hbar^2\sqrt{n^2-n_0^2}}{ma^2}. \tag{10}$$

Enačbo (9) izboljšamo tako, da jo v števcu in imenovalcu pomnožimo z $\frac{i\Gamma_n}{2}$:

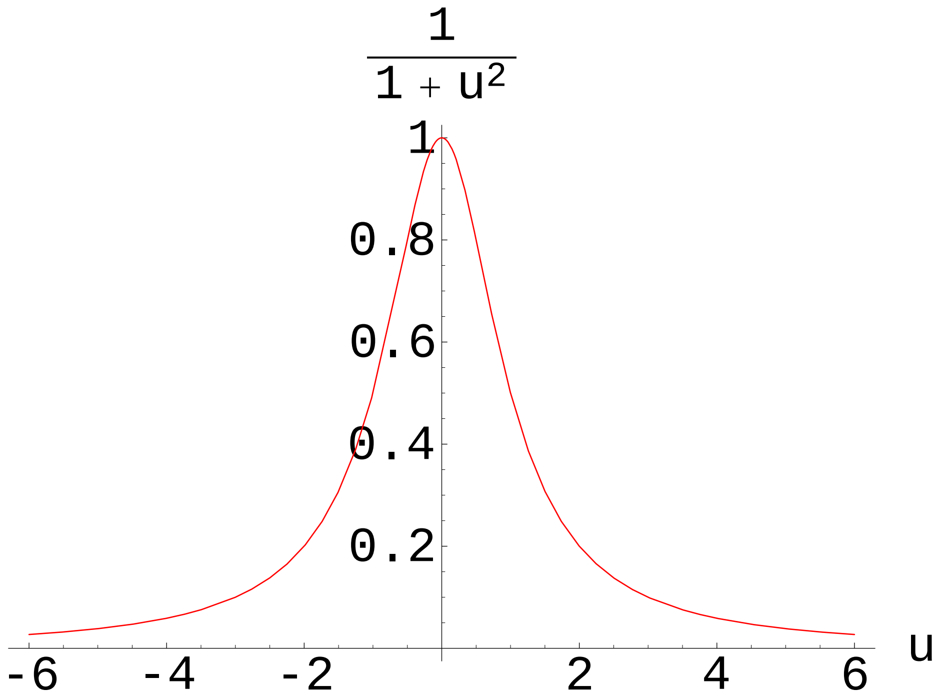
$$\frac{F}{A}=\frac{e^{-ika}(-1)^n i\frac{\Gamma_n}{2}}{E-E_n+i\frac{\Gamma_n}{2}} \tag{11}$$

T(E) je potem v bližini resonanc enak:

$$T(E)=\left|\frac{F}{A}\right|^2=\frac{\frac{\Gamma_n^2}{4}}{\frac{\Gamma_n^2}{4}+(E-E_n)^2} \tag{12}$$

$T(E)=\frac{1}{1+u^2}$, pri čemer je $u=\frac{2(E-E_n)}{\Gamma_n}$.

To je Lorentzova krivulja, ki ima obliko, kot jo kaže spodnja skica:



Γ_n pri Lorentzovi krivulji predstavlja širino resonance na polovični višini. To vidimo, ko v enačbo (12) vstavimo $E - E_n = \frac{\Gamma_n}{2}$ in dobimo $T = \frac{1}{2}$. $u = 0$ na sliki predstavlja $E = E_n$.

Ko se n povečuje, se širina resonance povečuje, ker v izrazu za Γ_n nastopa $\sqrt{n^2 - n_0^2}$, ki je naraščajoča funkcija n-ja, n_0 pa je konstanta odvisna od dimenzij jame. Zato so pri visokih energijah krivulje širše kot pri nizkih energijah. Tako krivuljo imamo samo v primeru, ko je $x_0 = \sqrt{\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}} \gg 1$.

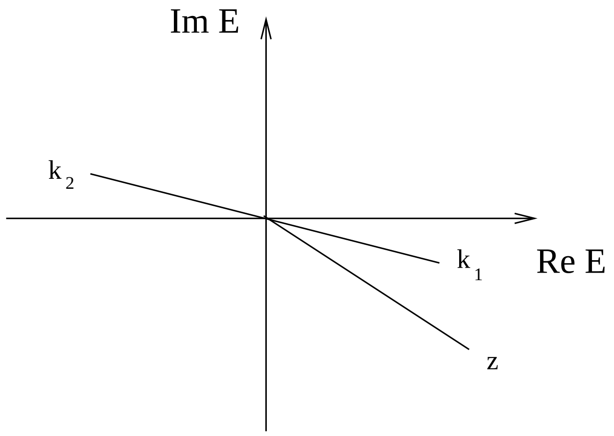
2. Iz enačbe (11) vidimo, da ima amplituda za prepustnost $\frac{F}{A}$ pol pri $E_n - i\frac{\Gamma_n}{2}$. Pri neskončni pot. jami so poli v prepustnosti povezani z vezanimi stanji sistema. Vezana stanja imajo realno energijo.

V našem primeru ima vsaka resonanca svoj pol, ampak ta pol je pri kompleksni energiji. Dobimo stanja s kompleksno energijo, ki jih imenujemo kvazivezana stanja. Delec v takem stanju lahko pobegne iz potencialne jame.

Energiji $E = E_n - i\frac{\Gamma_n}{2} \in \mathbb{C}$ ustreza $k \in \mathbb{C}$:

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2m(E_n - i\frac{\Gamma_n}{2})}{\hbar^2}} = \sqrt{z} \tag{13}$$

Kompleksno število z korenimo grafično. Pri tem dobimo rešitvi k_1 in $k_2 \in \mathbb{C}$:



Ker sta $E_n > 0$ in $\Gamma_n > 0$, se z nahaja v kompleksni ravnini v 4. kvadrantu. Pri korenjenju kompleksnega števila z se $|z|$ koreni, kot pa razpolovi. Obe rešitvi k_1 in k_2 sta fizikalno smiselni.

Ker je $k \in \mathbb{C}$, ga lahko zapišemo kot $k = k' + ik'' \Rightarrow$ za prepuščeni val Fe^{ikx} dobimo:

$Fe^{ik_1'x - k_1''x}$; $k_1' > 0,\ k_1'' < 0$ in

$Fe^{ik_2'x - k_2''x}$; $k_2' < 0,\ k_2'' > 0$

Rešitev, ki ustreza val. vektorju k_1 v limiti, ko gre $x \to +\infty$ eksponentno narašča.

Rešitev, ki ustreza val. vektorju k_2 v limiti, ko gre $x \to +\infty$ pa eksponentno pada.

3. Zanima nas časovni razvoj naše valovne funkcije. Recimo, da imamo $\psi(x,0)$ ob času 0. Časovni razvoj za lastna stanja, ki ustrezajo kompleksnim energijam $E = E_n - i\frac{\Gamma_n}{2}$ je potem:

$$\Psi(x,t) = \psi(x,0)\, e^{\frac{-iEt}{\hbar}} = \psi(x,0)\, e^{\frac{-i(E_n - i\frac{\Gamma_n}{2})t}{\hbar}} \tag{14}$$

Stanja s kompleksno energijo ustrezajo fizikalno stanjem, ki imajo določen razpadni čas (so kvazivezana).

Primer: Pot. jama predstavlja jedro uranovega atoma, ki razpada. Verjetnost, da najdemo jedro v nerazpadnem stanju s časom eksponentno pada.

Za izračun razpadnega časa potrebujemo verjetnostno gostoto za razpad:

$$\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2 = |\psi(x,0)|^2\, |e^{-\frac{\Gamma_n t}{2\hbar}}|^2\, |e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}|^2 = |\psi(x,0)|^2\, e^{-\frac{\Gamma_n t}{\hbar}} \tag{15}$$

$$\rho(x,t) = |\psi(x,0)|^2\, e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{16}$$

Upoštevali smo, da je $|e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}|^2 = 1$.

Razpadni čas je potem $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma_n}$. Večja kot je širina resonance, krajši je razpadni čas.