

Časovno odvisna perturbacija VI

Luka Jeromel

14. maj 2008

1 Naloga

Imamo delec s spinom $1/2$, ki je ob času $t = 0$ v stanju $|\uparrow\rangle$. Je v homogenem magnetnem polju B_z v smeri osi z . Ob času $t = 0$ vklopimo šibko magnetno polje v smeri osi x z velikostjo: $B_x(t) = B_x \frac{t}{\tau}$. Zanima nas kakšna je valovna funkcija ob času $t = \tau$.

2 Rešitev

Hamiltonova funkcija takšnega delca je

$$H = \frac{g\mu_B}{\hbar}(\vec{S} \cdot \vec{B})$$

Ker vemo da je $\vec{B} = (B_x \frac{t}{\tau}, 0, B_z)$ in $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ lahko izvedemo skalarni produkt in dobimo:

$$H = \frac{g\mu_B}{\hbar}(B_x \frac{t}{\tau} S_x + B_z S_z) \quad (1)$$

Ker je polje v x smeri mnogo manjše od polja v z smeri bomo za določitev valovne funkcije našega delca $|\psi, t\rangle$ uporabili perturbacijsko teorijo. Najprej označimo:

$$H_0 = \frac{g\mu_B}{\hbar} B_z S_z$$

Sedaj je hamiltonova funkcija v obliki:

$$H = H_0 + V(t)$$

Poglejmo najprej kaj naredi operator H_0 na valovni funkciji lastnih stanj delca.

$$H_0 |\uparrow\rangle = \frac{g\mu_B}{\hbar} B_z \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle = \hbar\omega_z |\uparrow\rangle$$

$$H_0 |\downarrow\rangle = -\frac{g\mu_B}{\hbar} B_z \frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle = -\hbar\omega_z |\downarrow\rangle$$

Označili smo $\omega_z \hbar = \frac{g\mu_B B_z}{2}$.

Časovni razvoj funkcij lastnih stanj je torej:

$$|\uparrow, t\rangle = |\uparrow\rangle \exp\left(-i\frac{E_\uparrow}{\hbar}t\right) = |\uparrow\rangle \exp(-i\omega_z t)$$

$$|\downarrow, t\rangle = |\downarrow\rangle \exp\left(-i\frac{E_\downarrow}{\hbar}t\right) = |\downarrow\rangle \exp(i\omega_z t)$$

Lastna stanja tvorijo ortogonalno bazo z dimenzijo dve. Zato lahko poljubno valovno funkcijo delca s spinom ena polovica razvijemo pa lastnih stanjih. Torej je:

$$|\psi, t\rangle = C_\uparrow(t) |\uparrow, t\rangle + C_\downarrow(t) |\downarrow, t\rangle$$

Iz teorije perturbacij dobimo enačbe za koeficiente v razvoju:

$$C_\uparrow(t) = C_\uparrow(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \langle \uparrow, t | V(t) | \uparrow, t \rangle dt \quad (2)$$

$$C_\downarrow(t) = C_\downarrow(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \langle \downarrow, t | V(t) | \uparrow, t \rangle dt \quad (3)$$

Če hočemo izračunati koeficienta v razvoju moramo najprej izračunati matrična elementa. Zato bomo sedaj pogledali kaj naredi operator $V(t)$ na vsaki lastni funkciji posebej. Izrazimo S_x z operatorjema S_+ in S_- .

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$$

Izračunajmo sedaj tole:

$$\begin{aligned} V(t) |\uparrow, t\rangle &= \frac{g\mu_B}{\hbar 2} \frac{t}{\tau} B_x (S_+ + S_-) |\uparrow, t\rangle \\ &= \frac{g\mu_B}{\hbar 2} \frac{t}{\tau} B_x \hbar |\downarrow\rangle \exp(-i\omega_z t) \end{aligned}$$

Pomnožimo najprej to z brajem $\langle \uparrow, t |$, da dobimo matrični element za izračun prvega koeficienta v razvoju. Ker sta funkciji $|\uparrow\rangle$ in $|\downarrow\rangle$ ortogonalni, je ta matrični element enak nič. Če upoštevamo še začetni pogoj $C_\uparrow(0) = 1$, dobimo za prvi koeficient enko.

Sedaj pomnožimo to še z drugim brajem $\langle \downarrow, t |$, upoštevamo še začetni pogoj $C_\downarrow(0) = 0$ in dobimo:

$$\langle \downarrow, t | V(t) | \uparrow, t \rangle = \frac{g\mu_B}{2} B_x \frac{t}{\tau} \exp(-2i\omega_z t) = \hbar\omega_x \frac{t}{\tau} \exp(-2i\omega_z t) \quad (4)$$

Vpeljali smo novo konstanto ω_x .

Izračunajmo sedaj koeficient C_{\downarrow} ob času τ :

$$C_{\downarrow}(\tau) = 0 - i\omega_x \int_0^{\tau} \frac{t}{\tau} \exp(-i2\omega_z t) dt$$

To preoblikujemo v brezdimenzijsko obliko, tako da vpeljemo novo spremenljivko $u = -i2\omega_z t$. Upoštevamo tole zvezo $\int e^u u du = (u-1)e^u$ in dobimo:

$$C_{\downarrow}(\tau) = \frac{i\omega_x}{4\omega_z^2\tau} (1 - (1 + 2i\omega_z\tau) \exp(-i2\omega_z\tau))$$

Sedaj lahko zapišemo valovno funkcijo našega delca v magnetnem polju:

$$|\psi, t\rangle = |\uparrow\rangle \exp(-i\omega_z\tau) + \frac{i\omega_x}{4\omega_z^2\tau} (1 - (1 + 2i\omega_z\tau) \exp(-i2\omega_z\tau)) |\downarrow\rangle \exp(i\omega_z\tau)$$

Valovno funkcijo lahko zmeraj pomnožimo z nekim kompleksnim številom, ki ima absolutno vrednost ena, in s tem ne spremenimo njene vloge. Še zmeraj predstavlja enak delec v istem potencialu. Zato bomo našo funkcijo pomnožili z faktorjem $\exp(-i\omega_z\tau)$ in jo s tem vsaj malce polepšali:

$$\begin{aligned} |\psi, \tau\rangle &= |\uparrow\rangle + \frac{i\omega_x}{4\omega_z^2\tau} (1 - (1 + 2i\omega_z\tau) \exp(-i2\omega_z\tau)) |\downarrow\rangle \exp(2i\omega_z\tau) \\ &= |\uparrow\rangle + \frac{i\omega_x}{4\omega_z^2\tau} (\exp(2i\omega_z\tau) - (1 + 2i\omega_z\tau)) |\downarrow\rangle \end{aligned}$$

To funkcijo bi radi primerjali z funkcijo:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) |\uparrow\rangle + \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) e^{i\varphi} |\downarrow\rangle$$

Tako bomo ugotovili, v katero smer je usmerjen spin delca v našem potencialu. Ker je to nekoliko pretežka naloga si jo bomo poenostavili in bomo pogledali samo dva limitna primera.

2.1 $\omega_z\tau \ll 1$

Ta primer predstavlja situacijo, ko magnetno polje v x smeri vklopimo v zelo kratkem času. V tem primeru je v eksponentu zelo majhno število, zato ga lahko razvijemo $\exp(2i\omega_z\tau) = 1 + 2i\omega_z\tau$ in dobimo:

$$\begin{aligned} |\psi, \tau\rangle &= |\uparrow\rangle + \frac{i\omega_x}{4\omega_z^2\tau} (1 + 2i\omega_z\tau - (1 + 2i\omega_z\tau) + \text{ost.}(\omega_z\tau)^2) |\downarrow\rangle \\ &= |\uparrow\rangle \end{aligned}$$

Vidimo, da če je sprememba zelo kratka se s spinom nič ne zgodi.

2.2 $\omega_z \tau \gg 1$

$$|\psi, \tau\rangle = |\uparrow\rangle + \frac{i\omega_x}{4\omega_z^2\tau} (\exp(2i\omega_z\tau) - (1 + 2i\omega_z\tau)) |\downarrow\rangle \quad (5)$$

V drugem koeficientu sedaj zanemarimo vse člene, razen člena $-i2\omega_z\tau$.

$$|\psi, \tau\rangle = |\uparrow\rangle + \frac{\omega_x}{2\omega_z} |\downarrow\rangle$$

Sedaj izračunamo kota

$$e^{i\varphi} = 1 \quad \implies \quad \varphi = 0$$

$$\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{\omega_x}{2\omega_z} \quad \implies \quad \vartheta \simeq \frac{\omega_x}{\omega_z}$$

Kot ϑ je ravno kot med vsoto z osjo in skupnim magnetnim poljem \vec{B} , torej je smer spina enaka smeri magnetnega polja.