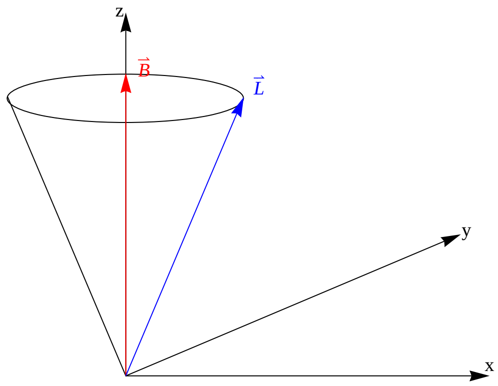
KVANTNA MEHANIKA I
2007/08
vaja: Larmorjeva precesija

Jure Klučar

15. maj 2008

1 Naloga

Delec z vrtilno količino $l = 1$, ki se giblje v krogelno simetričnem potencialu, je v stanju $m = 1$. Ob $t = 0$ vklopimo homogeno magnetno polje v ravnini xz pod kotom ϕ glede na os z. Kakšna je časovna odvisnost pričakovane vrednosti vrtilne količine?



Slika 1: **Precediranje vrtilne količine okoli mag. polja**

2 Lastne funkcije

Hamiltonov oeprator sistema (ob $t > 0$), zapišemo kot

$$\hat{H} = -\gamma \vec{B} \cdot \hat{\vec{L}}, \tag{1}$$

kjer je parameter γ moč sklopitve.
Zaradi enostavnešjega računanja, koordiantni sistem postavimo tako, da z os kaže v smeri magnetnega polja $\vec{B}$ in vektor vrtilne količine (ob $t < 0$) pod kotom ϕ glede na os z v ravnini xz (obratno kot v navodilih).
Mag. polje zapišemo

$$\vec{B} = B_0 \hat{e}_z \tag{2}$$

in hamiltonka v izbranem koordinatnem sistemu

$$\hat{H} = -\gamma B_0 \hat{L}_z. \tag{3}$$

Sedaj moramo poiskati lastne funckije hamiltoniana $\hat{H}$ oz. operatorja $\hat{L}_z$; te so tri, označimo jih

$$\begin{gathered}|\chi_-\rangle \\ |\chi_O\rangle \\ |\chi_+\rangle\end{gathered} \tag{4}$$

kjer ima $|\chi_-\rangle$ tretjo komponento vrtilne količine enako $m = -1$, $|\chi_0\rangle$ enako $m = 0$ in nazadnje $|\chi_+\rangle$ enako $m = 1$. Vse tri imajo velikost vrtilne količine $l = 1$.
Kot rečeno, so to hkrati lastne funkcije operatorja $\hat{H}$, torej imajo dobro definirano energijo. Izračunajmo jih

$$\begin{gathered}\langle\chi_-|\hat{H}|\chi_-\rangle = -\gamma B_0\langle\chi_-|\hat{L}_z|\chi_-\rangle = \gamma B_0\hbar \\ \langle\chi_O|\hat{H}|\chi_O\rangle = 0 \\ \langle\chi_+|\hat{H}|\chi_+\rangle = -\gamma B_0\hbar.\end{gathered} \tag{5}$$

3 Splošna rešitev in začetni pogoj

Splošna rešitev Schroedingerjeve enačbe je linearna kombinacija lastnih funkcij

$$|\chi(t)\rangle = c_-|\chi_-\rangle e^{-i\omega t} + c_0|\chi_0\rangle + c_+|\chi_+\rangle e^{i\omega t}, \tag{6}$$

kjer smo uvedli Larmorjevo frekvenco $\omega = \gamma B_0$.
Potrebujemo koeficiente c_-, c_0 in c_+. Te dobimo iz začetnega pogoja, kar pa ni čisto trivialno. Naloga pravi, da je ob času $t < 0$, vrtilna količina obrnjena v smeri pod kotom ϕ v ravnini xz (Slika1). Če začetno stanje označimo z $|\chi\rangle$ potem mora biti to lastna funckija operatorja $\hat{\vec{L}} \cdot \hat{e}_\phi$, kjer je $\hat{e}_\phi$ enotski vektor v smeri začetne vrtilne količine. Velja

$$\hat{\vec{L}} \cdot \hat{e}_\phi = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z) \cdot (\sin\phi, 0, \cos\phi) = \sin\phi \hat{L}_x + \cos\phi \hat{L}_z. \tag{7}$$

Velja enačba

$$\hat{\vec{L}} \cdot \hat{e}_\phi|\chi\rangle = \sin\phi \hat{L}_x|\chi\rangle + \cos\phi \hat{L}_z|\chi\rangle = \hbar|\chi\rangle, \tag{8}$$

saj je $|\chi\rangle$ lastna funckija z lastno vrednostji $m = 1$. Uporabimo še zvezo $\hat{L}_x = \frac{1}{2}(\hat{L}_+ + \hat{L}_-)$, in začetno stanje zapišemo kot

$$|\chi\rangle = c_-|\chi_-\rangle + c_0|\chi_O\rangle + c_+|\chi_+\rangle, \tag{9}$$

ter uporabimo zveze za premikalne operatorje

$$\begin{gathered}\hat{L}_-|\chi_+\rangle = \hbar\sqrt{2}|\chi_0\rangle \\ \hat{L}_-|\chi_O\rangle = \hbar\sqrt{2}|\chi_-\rangle \\ \hat{L}_-|\chi_-\rangle = 0\end{gathered}$$

ter za $\hat{L}_+$ analogno, in vse skupja vstavimo v (8) dobimo sistem enačb

$$\begin{gathered}\frac{\sqrt{2}}{2}c_0\sin\phi + c_+\cos\phi = c_+ \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(c_- + c_+)\sin\phi = c_0\end{gathered} \tag{10}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}c_0 \sin\phi - c_+ \cos\phi = c_-.$$

Srednja enačba je odveč, uporabni sta le prva in zadnja, ki dasta

$$c_- = \frac{\sin\phi}{1-\cos\phi} = \frac{c_0}{\sqrt{2}} \tan\frac{\phi}{2}$$

$$c_+ = \frac{\sin\phi}{1+\cos\phi} = \frac{c_0}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\frac{\phi}{2}$$

Koeficient c_0 dobimo iz normalizacije $|\chi\rangle$

$$c_0 = \sqrt{2}\cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\phi}{2}$$

iz česar sledi

$$\begin{aligned} c_- &= \sin^2\frac{\phi}{2} \\ c_+ &= \cos^2\frac{\phi}{2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Dobili smo časovni razvoj valovne funkcije, ki je rešitev našega Hamitoniana

$$|\chi(t)\rangle = \sin^2\frac{\phi}{2}|\chi_-\rangle e^{-i\omega t} + \sqrt{2}\cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\phi}{2}|\chi_0\rangle + \cos^2\frac{\phi}{2}|\chi_+\rangle e^{i\omega t}, \tag{12}$$

iz katere lahko izračunamo željene pričakovane vrednosti.

4 Pričakovane vrednosti komponent operatorja vrtilne količine

Zanima nas, kako se obnašajo vse tri komponente vrtilne količine v danem mag. polju. Nič lažjega, izračunati je potrebno naslednje pričakovane vrednosti

$$\langle \hat{L}_\alpha(t)\rangle = \langle\chi(t)|\hat{L}_\alpha|\chi(t)\rangle,$$

kjer je indeks $\alpha = x, y, z$.
Ob uporabi zvez

$$\langle \hat{L}_x\rangle = Re\langle \hat{L}_+\rangle$$

$$\langle \hat{L}_y\rangle = Im\langle \hat{L}_+\rangle,$$

naj bralec sam za vajo izračuna pričakovane vrednosti.
Rezultati so

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}_x\rangle &= \hbar\sin\phi\cos\omega t \\ \langle \hat{L}_y\rangle &= -\hbar\sin\phi\sin\omega t \\ \langle \hat{L}_z\rangle &= \hbar\cos\phi. \end{aligned} \tag{13}$$

Iz (13) je razvidno, da vrtilna količina precedira okoli magnetnega polja z Larmorjevo frekvenco $\omega = \gamma B_0$.