Valovni paket II

Jure Grbec
13. marec 2008

Naloga:

Izračunaj časovni razvoj valovnega paketa za delec, ki se giblje v konstantnem potencialu in časovno odvisnost verjetnostne gostote.

Rešitev:

Če začnemo s poljubno valovno funkcijo $|\psi\rangle = \sum_k C_k \, |\psi_k\rangle$, lahko njen časovni razvoj zapišemo kot: $|\psi,t\rangle = \sum_k C_k \, |\psi_k\rangle e^{-i\frac{E_k}{\hbar}t}$ Pri tem je $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{<p>^2}{2m}$.

Vsoto lahko zaradi zveznosti zapišemo tudi kot integral. Tako pridemo do uporabne oblike:

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}} \, e^{-\frac{(x-<x>)^2}{4\sigma^2}} e^{i\frac{<p>}{\hbar}x} e^{-i\frac{\hbar k^2}{2m}t} dk$$

C_k lahko izračunamo tako, da izračunamo $\Psi(x,0)$.

$$\Psi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx} dk$$

Pozorni bralec prepozna v tej enačbi Fourierevo transformacijo, tako lahko preprosto izračunamo ***C_k*** z inverzno Fourierevo transformacijo:

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,0) e^{-ikx} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-<x>)^2}{4\sigma^2}} e^{i(\frac{<p>}{\hbar}-k)x} dx =$$

Integral lahko izračunamo in pridemo do:

$$C_k = \sqrt[4]{\frac{\sigma^2}{2\pi^3}} e^{-\sigma^2\left(k-\frac{<p>}{\hbar}\right)^2}$$

Vstavimo vse v $\Psi(x,t)$ in dobimo:

$$\Psi(x,t) = \sqrt[4]{\frac{\sigma^2}{2\pi^3}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2\left(k-\frac{<p>}{\hbar}\right)^2} e^{ikx} e^{-i\frac{\hbar k^2}{2m}t} dk =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}\sqrt{1+i\frac{\hbar}{2m\sigma^2}t}} e^{\frac{(ix+2\sigma^2\frac{<p>}{m})^2}{4\sigma^2(1+\frac{i\hbar}{2m\sigma^2}t)} - \frac{\sigma^2<p>^2}{m^2}}$$

To je časovno razvit valovni paket v končni obliki. Od tu lahko izpeljemo časovno odvisnost verjetnostne gostote.

$$\left|\Psi(x,t)\right|^2 = \left|A\right|^2 e^{2\,\mathrm{Re}(B)}$$

Kjer je

$$\left|A\right|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\sqrt{1+i\frac{\hbar}{2m\sigma^2}t}\sqrt{1-i\frac{\hbar}{2m\sigma^2}t}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\sqrt{1+\left(\frac{\hbar}{2m\sigma^2}t\right)^2}}$$

$$2\,\mathrm{Re}(B) = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{(ix + 2\sigma^2 \frac{<p>}{m})^2}{4\sigma^2(1 + i\frac{\hbar}{2m\sigma^2}t)} - \frac{\sigma^2 <p>^2}{m^2}\right) =$$

$$= \frac{-(x - \frac{<p>}{m}t)^2}{2\sigma^2\left(1 + (\frac{\hbar t}{2m\sigma^2})^2\right)}$$

Poračunamo in dobimo:

$$\left|\Psi(x,t)\right|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\sqrt{1 + \left(\frac{\hbar}{2m\sigma^2}t\right)^2}} e^{-\frac{(x - \frac{<p>}{m}t)^2}{2\sigma^2\left(1 + (\frac{\hbar t}{2m\sigma^2})^2\right)}}$$

To lahko veliko lepše zapišemo, če opazimo:

$$\sigma(t) = \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar}{2m\sigma^2}t\right)^2}\,\sigma$$

Končni izraz je potem:

$$\underline{\left|\Psi(x,t)\right|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(t)^2}} e^{-\frac{(x - \frac{<p>}{m}t)^2}{2\sigma(t)^2}}}$$