Heisenbergov princip nedoločenosti

Kvantna mehanika I

naloga

Gregor Traven
Astronomsko geofizikalna smer
28030377

marec 2008

NALOGA

Radi bi izpeljali produkt nedoločenosti dveh splošnih operatorjev A in B. Predpostavili bomo da sta operatorja hermitska ter uporabili nekaj pravil, ki bodo sproti razložena. Zanima nas torej vrednost $\delta A \delta B$.

Če je operator A sebi hermitsko adjungiran ali na kratko **hermitski**, potem velja

$$A^\dagger = A$$
$$\langle \Psi_1 | A \Psi_2 \rangle = \langle A^\dagger \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \langle A \Psi_1 | \Psi_2 \rangle.$$

Nedoločenost količine (operatorja) A je definirana kot

$$\delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle}.$$

Definirajmo nova operatorja

$$A' = A - \langle A \rangle \quad \text{ter} \quad B' = B - \langle B \rangle$$

in pokažimo da sta, upoštevajoč $\langle A \rangle^* = \langle A \rangle$, tudi ta dva hermitska:

$$\langle \Psi | A' | \Psi \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle - \langle \Psi | \langle A \rangle | \Psi \rangle = \langle A \Psi | \Psi \rangle - \langle \langle A \rangle^* \Psi | \Psi \rangle = \langle A' \Psi | \Psi \rangle.$$

Zdaj se lahko lotimo izpeljave našega produkta nedoločenosti. Začeli bomo s kvadriranjem izraza.

$$(\delta A)^2 (\delta B)^2 = \langle A'^2 \rangle \langle B'^2 \rangle = \langle \Psi | A'^2 | \Psi \rangle \langle \Psi | B'^2 | \Psi \rangle = \langle A' \Psi | A' | \Psi \rangle \langle B' \Psi | B' | \Psi \rangle$$

Ob upoštevanju Cauchy-Schwarzove neenakosti lahko za zgornji izraz zapišemo

$$\langle A' \Psi | A' | \Psi \rangle \langle B' \Psi | B' | \Psi \rangle = \langle A' \Psi | A' \Psi \rangle \langle B' \Psi | B' \Psi \rangle \geq |\langle A' \Psi | B' \Psi \rangle|^2 = |\langle \Psi | A' B' \Psi \rangle|^2 \tag{1}$$

$A'B'$ lahko zapišemo z dekompozicijo produkta kot

$$A'B' = \frac{A'B' + B'A'}{2} + \frac{A'B' - B'A'}{2} = \frac{\{A', B'\}}{2} + \frac{[A', B']}{2}$$

kjer je $[A', B']$ **komutator** ter $\{A', B'\}$ **antikomutator**.

Poglejmo kaj se zgodi če komutator in antikomutator hermitsko adjungiramo. Na tem mestu uporabimo zvezo za hermitiranje produkta $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

$$\{A', B'\}^\dagger = (A'B')^\dagger + (B'A')^\dagger = B'^\dagger A'^\dagger + A'^\dagger B'^\dagger = B'A' + A'B' = \{A', B'\}$$

$\Longrightarrow$ antikomutator je hermitski

$$[A', B']^\dagger = (A'B')^\dagger - (B'A')^\dagger = B'^\dagger A'^\dagger - A'^\dagger B'^\dagger = B'A' - A'B' = -[A', B']$$

$\Longrightarrow$ komutator je antihermitski ($C^\dagger = -C$) kjer velja

$$\langle C \rangle = \langle \Psi | C | \Psi \rangle = -\langle C \Psi | \Psi \rangle = -\langle \Psi | C \Psi \rangle^* = -\langle C \rangle^* \quad \Rightarrow \quad \text{C je čisto imaginarno število}$$

Ob upoštevanju zgornjih relacij nadaljujemo izpeljavo iz (1)

$$(\delta A)^2 (\delta B)^2 \geq |\langle \Psi | A' B' \Psi \rangle|^2 = \left| \langle \Psi | \frac{1}{2} \left(\{A', B'\} + [A', B'] \right) \Psi \rangle \right|^2 =$$

$$= \left| \left\langle \Psi \left| \frac{\{A', B'\}}{2} \Psi \right. \right\rangle + \left\langle \Psi \left| \frac{[A', B']}{2} \Psi \right. \right\rangle \right|^2 \geq \left| \left\langle \Psi \left| \frac{[A', B']}{2} \Psi \right. \right\rangle \right|^2 = \left| \left\langle \Psi \left| \frac{[A, B]}{2} \Psi \right. \right\rangle \right|^2$$

Pričakovana vrednost komutatorja je imaginarno, antikomutatorja pa realno število, zato je kvadrat absolutne vrednosti njune vsote kar enak vsoti kvadratov absolutnih vrednosti posameznih členov in zadnja neenakost na prejšnji strani velja. Upoštevali smo še izraz

$$[A', B'] = [A - \langle A\rangle, B - \langle B\rangle] = [A, B] - [A, \langle B\rangle] - [\langle A\rangle, B] + [\langle A\rangle, \langle B\rangle]$$

v katerem je od nič različen le prvi člen, saj sta pričakovani vrednosti operatorjev A in B števili, ki komutirata tako s poljubnim operatorjem kot med seboj. Velja torej $[A', B'] = [A, B]$.

Na koncu lahko zapišemo končno obliko Heisenbergovega načela nedoločenosti kot

$$\delta A \delta B \geq \frac{1}{2} \left|\langle \Psi \left|[A, B]\right. \Psi\rangle\right|^2 .$$