Valovni paket I

Matjaž Žganec

21. marec 2008

Naloga

Zanima nas, katera valovna funkcija ima najmanjši produkt nedoločenosti lege in gibalne količine.

Rešitev

Za hermitska operatorja $A = A^\dagger$ in $B = B^\dagger$ z uvedbo operatorjev $A' = A - \langle A\rangle$ in $B' = B - \langle B\rangle$ izpeljemo

$$\begin{aligned} \delta^2 A \delta^2 B &= \langle\psi|A'^2|\psi\rangle\langle\psi|B'^2|\psi\rangle \\ &= \langle A'\psi|A'\psi\rangle\langle B'\psi|B'\psi\rangle \\ &\geq |\langle A'\psi|B'\psi\rangle|^2 \\ &= \left|\frac{\langle[A,B]\rangle}{2}\right|^2 + \left|\frac{\langle\{A,B\}\rangle}{2}\right|^2 . \end{aligned} \tag{1}$$

Pri neenačaju smo uporabili Cauchy - Schwarzevo neenakost. Podrobnejša izpeljava je na voljo v vaji *Heisenbergovo načelo nedoločenosti.*

Produkt nedoločenosti lege in gibalne količine je najmanjši, če imamo pri Cauchy - Schwarzevi neenakosti enačaj in če je antikomutator v drugem členu (1) enak nič. Iz prve zahteve sledi vzporednost vektorjev

$$\langle A'\psi|A'\psi\rangle\langle B'\psi|B'\psi\rangle = |\langle A'\psi|B'\psi\rangle|^2 \qquad \longleftrightarrow \qquad \langle A'\psi| = \lambda\langle B'\psi|. \tag{2}$$

Pri tem je λ zaenkrat še poljubno kompleksno število. Antikomutator v (1) razpišemo v

$$\begin{aligned} \langle\psi|\{A',B'\}\psi\rangle &= \langle\psi|(A'B' + B'A')\psi\rangle \\ &= \langle\psi|A'B'\psi\rangle + \langle\psi|B'A'\psi\rangle \\ &= \langle A'\psi|B'\psi\rangle + \langle B'\psi|A'\psi\rangle \\ &= \langle A'\psi|B'\psi\rangle + \langle A'\psi|B'\psi\rangle^* \\ &= \lambda\langle B'\psi|B'\psi\rangle + \lambda^*\langle B'\psi|B'\psi\rangle \\ &= (\lambda+\lambda^*)\langle B'\psi|B'\psi\rangle = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Zadnjemu enačaju zadostimo v dveh primerih. Skalarni produkt $\langle B'\psi|B'\psi\rangle$ lahko postavimo na nič. Na koncu bomo pokazali, da ta zahteva ni smiselna. Druga možnost je, da je vsota v oklepaju enaka nič. Sledi, da je parameter λ čisto imaginarno število

$$\mathrm{Re}(\lambda) \quad = \quad 0. \tag{4}$$

Zato lahko vpeljemo $\lambda = -\mathrm{i}\lambda'$, kjer je λ' realno število.

V enačbo za vzporednost vektorjev (2) vstavimo operatorja lege $A = x$ in gibalne količine $B = p$.

$$\begin{aligned}(x - \langle x\rangle)\psi(x) \quad &= \quad \mathrm{i}\lambda'\left(p - \langle p\rangle\right)\psi(x) \\ &= \quad \mathrm{i}\lambda'\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x} - \langle p\rangle\right)\psi(x)\end{aligned} \tag{5}$$

Dobili smo *navadno* diferencialno enačbo, ki jo prepišemo v obliko

$$\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\psi(x)} \quad = \quad \left(\frac{x - \langle x\rangle}{\lambda'\hbar} + \mathrm{i}\frac{\langle p\rangle}{\hbar}\right)\mathrm{d}x \tag{6}$$

in integriramo

$$\ln\psi(x) \quad = \quad \left(\frac{x/2 - \langle x\rangle}{\lambda'\hbar} + \mathrm{i}\frac{\langle p\rangle}{\hbar}\right)x + \ln C. \tag{7}$$

Prvi člen v oklepaju dopolnimo do popolnega kvadrata in ostanek spravimo v novo konstanto C'.

$$\psi(x) \quad = \quad C'\exp\left(\frac{(x - \langle x\rangle)^2}{2\lambda'\hbar} + \mathrm{i}\frac{\langle p\rangle x}{\hbar}\right) \tag{8}$$

Da določimo normalizacijsko konstanto C', zapišemo verjetnostno gostoto.

$$|\psi(x)|^2 \quad = \quad C'^2\exp\left(\frac{(x - \langle x\rangle)^2}{\lambda'\hbar}\right) \tag{9}$$

Ta je integrabilna le za $\lambda' < 0$. Ker ima funkcija Gaussovo obliko, uvedemo standardno deviacijo σ kot $\lambda'\hbar = -2\sigma^2$. Sledi

$$|\psi(x)|^2 = C'^2\exp\left(\frac{(x - \langle x\rangle)^2}{-2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(\frac{(x - \langle x\rangle)^2}{-2\sigma^2}\right). \tag{10}$$

Valovna funkcija z najmanjšim produktom nedoločenosti lege in gibalne količine $\delta x\delta p = \hbar/2$, ki je še dovoljen po Heisenbergovem načelu, je *valovni paket*

$$\psi(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x - \langle x\rangle)^2}{4\sigma^2}\right)\exp\left(\mathrm{i}\frac{\langle p\rangle x}{\hbar}\right) \tag{11}$$

s parametri $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$ in σ.

Rezultat (11) smo namenoma zapisali z ločenima eksponentnima faktorjema. Prvi faktor predstavlja ovojnico Gaussove oblike in je realen. Drugi faktor opisuje sinusno nihanje s periodo $2\pi\hbar/\langle p\rangle$, kjer sta fazi imaginarnega in realnega dela zamaknjeni za $\Delta x = \pi\hbar/2\langle p\rangle$. Razmere prikazuje Slika 1.

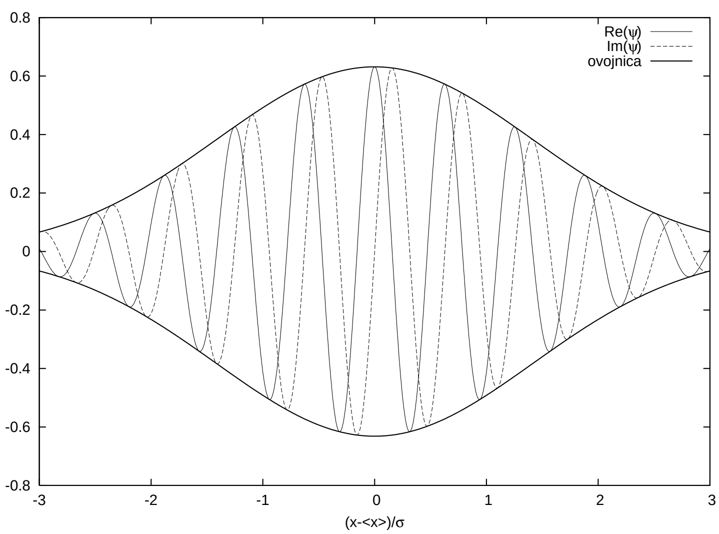
Končajmo z obljubljeno razlago, zakaj zahteva $\langle B'\psi|B'\psi\rangle = 0$ ni smiselna[1]. Ko vstavimo $B' = B - \langle B\rangle$, dobimo

$$\langle B'\psi|B'\psi\rangle = \langle B^2\rangle - \langle B\rangle^2 = \delta^2 B = 0. \tag{12}$$

Ker sta $|A'\psi\rangle$ in $|B'\psi\rangle$ vzporedna, so lastne funkcije operatorja B hkrati tudi lastne funkcije operatorja A. Velja torej

$$\begin{aligned} B|\psi\rangle &= \langle B\rangle|\psi\rangle \\ A|\psi\rangle &= \langle A\rangle|\psi\rangle. \end{aligned} \tag{13}$$

To pomeni, da je produkt nedoločenosti operatorjev A in B enak nič. Ker sta A in B operatorja lege in gibalne količine, ne moremo zadostiti Heisenbergovemu načelu nedoločenosti.



Slika 1: Realni in imaginarni del valovnega paketa (11) z ovojnico pri brezdimenzijskem parametru $\langle p\rangle\sigma/\hbar = 10$. V primeru $\langle p\rangle = 0$ je imaginarni del valovne funkcije enak nič. Realni del sovpada z zgornjo polovico ovojnice.

[1] Spomnimo, da smo ob neupoštevanju te zahteve za λ dobili čisto imaginarno število (4).