Kvantna logična vrata

Simon Kaučič

22. maj 2008

V kvantnem računalništvu naletimo na naslednja kvantna vrata, ki jih opišemo z operatorji:

$$
\begin{aligned}
X &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{(deluje v Hilbertovem prostoru s spinom 1/2)} \\
Ha &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{(Hadamardova vrata)} \\
Z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{(deluje v Hilbertovem prostoru s spinom 1/2)} \\
CNOT &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{(deluje v Hilbertovem prostoru s spinom 1/2)}
\end{aligned}
$$

1. Pokaži, kako lahko s temi operatorji tvorimo Bellova stanja.
2. Pokaži, da lahko te operatorje konstruiramo z vklapljanjem magnetnega polja, interakcije med spini in konstantnega potenciala v primerno dolgih časovnih intervalih.

1 Bellova stanja

1.1 Baza

Ker smo v prostiru s spinom 1/2, sta v bazi vektorja gor in dol. Označim:

$$
\begin{aligned}
|\uparrow\rangle &\rightarrow |0\rangle \text{ temu stanju pripada spinor: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
|\downarrow\rangle &\rightarrow |1\rangle \text{ temu stanju pripada spinor: } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

1.2 Opratorji

Če delujemo z operatorjem X na stanje $|1\rangle$ dobimo$|0\rangle$ in obratno. Hademardov operator naredi mešanico obeh stanj,

$$\begin{aligned} H\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ H\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Operator Z pusti stanje $|0\rangle$ pri miru, stanju $|1\rangle$ pa spremeni predznak. Ostane le še operator $CNOT$, ki deluje na dve stanji hkrati;

$$\begin{aligned} CNOT\,|00\rangle &= |00\rangle \\ CNOT\,|01\rangle &= |01\rangle \\ CNOT\,|10\rangle &= |11\rangle \\ CNOT\,|11\rangle &= |10\rangle \end{aligned}$$

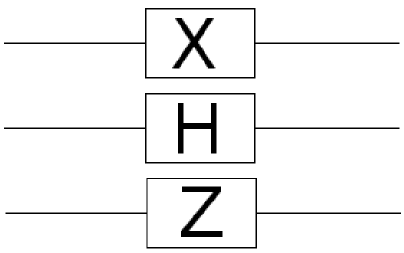
Poljubno stnanje lahko opišemo z linearno kombinacijo teh štirih stanj.

$$|\Psi\rangle = a\,|00\rangle + b\,|01\rangle + c\,|10\rangle + d\,|11\rangle$$

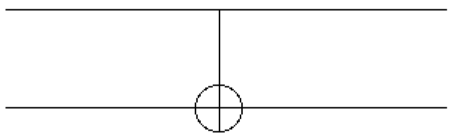
Npr. stanje $|00\rangle$ zapisano z vektorjem, izgleda takole $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.3 Vezja

Ker ti operatorji predstavljajo kvantna logična vrata, jih, kot pri običajnih logičnih vrati, lahko prikažemo z grafično shemo in jih tako razporedimo v vezja.

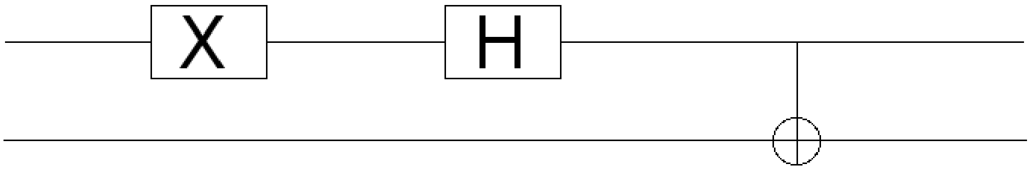


Sheme operatorjev X,H in Z



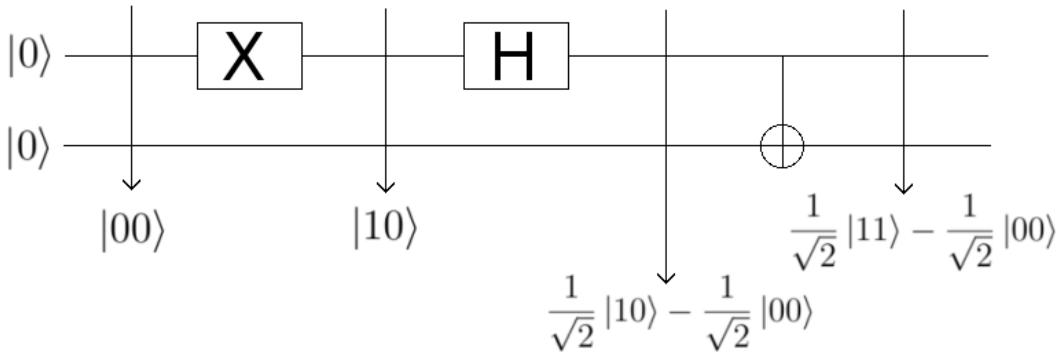
Shema operatorja $CNOT$.

Pa poglejmo kaj naredi naslenje vezje.



Na sliki je vezje sestavljeno iz kvantnih vrat.

Vstavimo v vezje stanje $|00\rangle$.



Na sliki je prikazano kaj se v vezju dogaja s posameznim spinom in kako izgledajo stanja na posameznih predelih vezja

Z malo premetavanja ugotovimo da je to vezje generator Bellovih stanj. Posamezna začetno stanje spremeni v eno od Bellovih stanj.

$$
\begin{aligned}
|00\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle - |00\rangle) \\
|11\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \\
|10\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\
|01\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)
\end{aligned}
$$

2 Fizikalno ozadje

Zanima nas kako sestaviti te operatorje z vklapljanjem magnetnega polja, interakcije med spini in konstantnega potenciala v primerno dolgih časovnih intervalih. Za začetek si poglejmo kako izgledajo operatorji za vsakega od teh manevrov. Operator za spin v magnetnem polju izgleda takole:

$$H = \frac{g\mu_B}{\hbar}\vec{S}_1\vec{B} \text{ in } H = \frac{g\mu_B}{\hbar}\vec{S}_2\vec{B} \tag{1}$$

Manjkata le še operator ki sklaplja spina,

$$H = \lambda \vec{S}_1 \vec{S}_2 \tag{2}$$

in operator, ki nam doda konstantni potencial

$$H = \lambda, \tag{3}$$

slednjega se uporablja za spreminjanje faze.

Valovno funkcijo $|\Psi, t\rangle$ dobim tako, da $|\Psi, 0\rangle$ razvijem po lastnih fukcijah in jih propagiram v času. Velja pa tudi

$$|\Psi, t\rangle = e^{-i\frac{H}{\hbar}t} |\Psi, 0\rangle$$

Poglejmo si kako lahko razvijemo izraz $e^{i\varphi A}$, če je operator$A^2 = I$.

$$\begin{aligned} e^{i\varphi A} &= 1 + i\varphi A - \frac{(\varphi A)^2}{2!} - i\frac{(\varphi A)^3}{3!} + \frac{(\varphi A)^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(I - \frac{1}{2}\varphi^2 I + \frac{1}{4!}\varphi^4 I + \cdots\right) + iA\left(\varphi I - \frac{1}{3!}\varphi^3 I + \cdots\right) \\ e^{i\varphi A} &= I\cos\varphi + iA\sin\varphi \end{aligned} \tag{4}$$

2.1 Operator X

Operator X sestavimo tako, da najprej postavimo spin 1 za nekaj časa v magnetno polje, operator (1) in potlej še v konstanten potencial (3).

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \vec{B} &= (B, 0, 0) \\ H &= \frac{g\mu_B}{\hbar} S_x B = \frac{g\mu_B}{2}\sigma_x B \end{aligned}$$

$$e^{-i\frac{H}{\hbar}t} = e^{-i\frac{g\mu_B}{2\hbar}\sigma_x B t} = I\cos\nu - i\sigma_x \sin\nu, \tag{5}$$

kjer je $\nu = \frac{g\mu_B}{2\hbar}Bt$. če želim imeti operator X mora biti:

$$\begin{aligned} \sin\nu &= 1 \\ \cos\nu &= 0 \end{aligned}$$

Torej $\nu = \frac{\pi}{2}$. To vstavimo v (5) in dobimo

$$e^{-i\frac{H}{\hbar}t} = -i\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Na koncu postavimo delec za nekaj čsa v konstanten potencial$H = \lambda$. Veljati mora:

$$e^{-i\frac{H}{\hbar}t} = e^{-i\frac{\lambda}{\hbar}t} = i,$$

torej

$$\frac{\lambda t}{\hbar} = \frac{\pi}{2}$$

2.2 Hademard

Za začetek postavimo spin v magnetnopolje v smeri y.

$$\begin{aligned}
Ha &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
\vec{B}_y &= (0, B_y, 0) \\
H &= \frac{g\mu_B}{2}\sigma_y B_y \\
\nu &= \frac{g\mu_B}{2\hbar}B_y
\end{aligned}$$

Kot prej

$$\begin{aligned}
e^{-i\frac{H}{\hbar}t} &= I\cos\nu - i\sigma_y \sin\nu, \\
&\quad \text{če za vrednost } \nu \text{ vzamemo } \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(I - i\sigma_y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sedaj pa na dobljeno le še delujemo z operatorjem X.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3 Vrata $CNOT$

Vrata $CNOT$ delujejo na dva spina. Očitno je da bomo morali delovati z operatorjem, ki sklaplja spina (2), zato je najbolje, da si kar pogledamo kaj ta operator naredi, če deluje na stanje $|\uparrow\uparrow\rangle$ ali $|\uparrow\downarrow\rangle$.

$$\begin{aligned}
H &= \lambda S_{1z}S_{2z} \\
H|\uparrow\uparrow\rangle &= \frac{\lambda\hbar^2}{4}|\uparrow\uparrow\rangle \\
H|\uparrow\downarrow\rangle &= -\frac{\lambda\hbar^2}{4}|\uparrow\downarrow\rangle
\end{aligned}$$

Če ga zapišem v matrični obliki

$$H = \lambda\frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Velja $H^2 = I$, zato lahko uporabimo enačbo (4).

Postopek kako zgenerirati $CNOT$ vrata:

1. Hademard na drugem spinu
2. drugi spin v magnetno polje v smeri z za $\frac{g\mu_B}{2\hbar}Bt = \frac{\pi}{4}$
3. prvi spin v magnetno polje v smeri z za $\frac{g\mu_B}{2\hbar}Bt = \frac{\pi}{4}$
4. sklopitev za $\frac{\pi}{4}$
5. Hademard na 2. spin
6. popravek faze