SIPANJE NA KONČNI POTENCIALNI JAMI I

Erik Lovrič, 28.2.2008

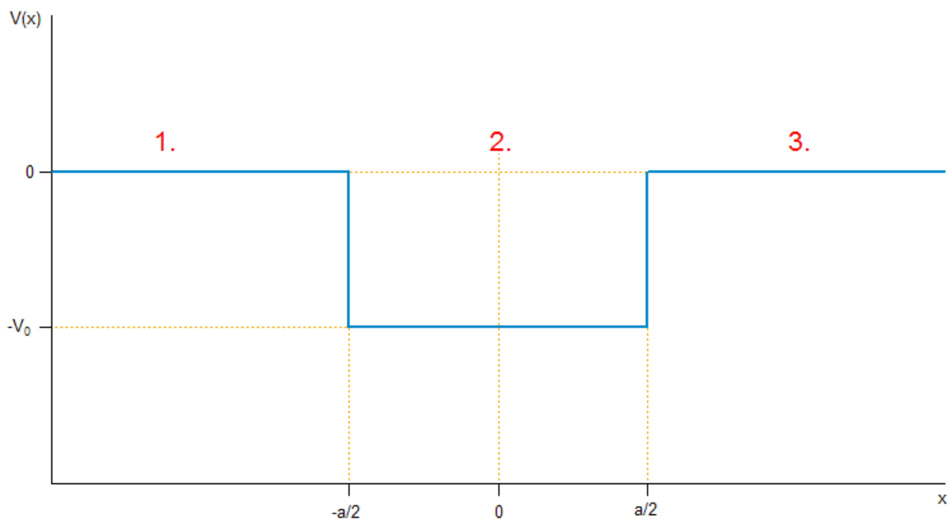
1 Naloga

1. Izračunaj amplitudo za prepustnost končne potencialne jame z globino V_0 in širino a
2. Pri katerih energijah je prepustnost jame enaka 1?

2 Amplituda prepustnosti

Potencial je podan z:

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & |x| \leq \frac{a}{2} \\ 0, & |x| > \frac{a}{2} \end{cases}$$



Slika: oblika potenciala in delitev na tri območja.

Celoten potencial razdelimo na tri območja (Slika), za vsakega napišemo nastavek za valovno funkcijo:

1. $\Psi_1 = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$
2. $\Psi_2 = Ce^{ik'x} + De^{-ik'x}$
3. $\Psi_3 = Fe^{ikx}$,

pri tem je:

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \qquad k' = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}.$$

Za zapisane nastavke morajo veljati pogoji zveznosti (I,II) in zvezne odvedljivosti (III,IV) na meji med območji:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & \Psi_1\big|_{x=-\frac{a}{2}} = \Psi_2\big|_{x=-\frac{a}{2}}, \\ \mathrm{II} & \Psi_2\big|_{x=\frac{a}{2}} = \Psi_3\big|_{x=\frac{a}{2}}, \\ \mathrm{III} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\big|_{x=-\frac{a}{2}} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}\big|_{x=-\frac{a}{2}}, \\ \mathrm{IV} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}\big|_{x=\frac{a}{2}} = \frac{\partial \Psi_3}{\partial x}\big|_{x=\frac{a}{2}}. \end{array}$$

Tako dobimo:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & Ae^{-ik\frac{a}{2}} + Be^{ik\frac{a}{2}} = Ce^{-ik'\frac{a}{2}} + De^{ik'\frac{a}{2}}, \\ \mathrm{II} & Ce^{ik'\frac{a}{2}} + De^{-ik'\frac{a}{2}} = Fe^{ik\frac{a}{2}}, \\ \mathrm{III} & kAe^{-ik\frac{a}{2}} - kBe^{ik\frac{a}{2}} = k'Ce^{-ik'\frac{a}{2}} - k'De^{ik'\frac{a}{2}}, \\ \mathrm{IV} & k'Ce^{ik'\frac{a}{2}} - k'De^{-ik'\frac{a}{2}} = kFe^{ik\frac{a}{2}}. \end{array}$$

To je sistem štirih enačb s štirimi neznankami B,C,D in F; A je namreč znan začetni parameter. Iščemo amplitudo prepustnosti, tj. $|F/A|^2$.

Najprej pomnožimo enačbo II s k' in jo seštejemo z enačbo IV, tako dobimo:

$$C = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k}{k'}\right) F e^{i(k-k')\frac{a}{2}}.$$

Nato enačbi še odštejemo in dobimo:

$$D = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{k}{k'}\right) F e^{i(k+k')\frac{a}{2}}.$$

Dobljeni odvisnosti vstavimo v enačbi I in III, enačbo I pomnožimo s k in jo seštejemo s III ter preoblikujemo:

$$2kAe^{-ik\frac{a}{2}} = \frac{F}{2}\left[k\left(1 + \frac{k}{k'}\right)e^{i(k-2k')\frac{a}{2}} + k\left(1 - \frac{k}{k'}\right)e^{i(k+2k')\frac{a}{2}} + \right.$$
$$\left. +(k'+k)e^{i(k-2k')\frac{a}{2}} - (k'-k)e^{i(k+2k')\frac{a}{2}}\right].$$

$$\frac{4kA}{F}e^{-ik\frac{a}{2}} = k\left[\left(1 + \frac{k}{k'}\right)e^{i(k-2k')\frac{a}{2}} + \left(1 - \frac{k}{k'}\right)e^{i(k+2k')\frac{a}{2}}\right] +$$
$$+k'\left[\left(1 + \frac{k}{k'}\right)e^{i(k-2k')\frac{a}{2}} - \left(1 - \frac{k}{k'}\right)e^{i(k+2k')\frac{a}{2}}\right].$$

$$\frac{4kA}{F} = k\left[\left(1 + \frac{k}{k'}\right)e^{i(k-k')a} + \left(1 - \frac{k}{k'}\right)e^{i(k+k')a}\right] +$$
$$+k'\left[\left(1 + \frac{k}{k'}\right)e^{i(k-k')a} - \left(1 - \frac{k}{k'}\right)e^{i(k+k')a}\right].$$

$$\frac{4kA}{F} = e^{ika}\left[k\left[\left(1 + \frac{k}{k'}\right)e^{-ik'a} + \left(1 - \frac{k}{k'}\right)e^{ik'a}\right] + \right.$$
$$\left. +k'\left[\left(1 + \frac{k}{k'}\right)e^{-ik'a} - \left(1 - \frac{k}{k'}\right)e^{ik'a}\right]\right].$$

$$\frac{4kA}{F} = e^{ika}\left[k\left(2\cos k'a - 2i\frac{k}{k'}\sin k'a\right) + k'\left(2\frac{k}{k'}\cos k'a - 2i\sin k'a\right)\right].$$

$$\frac{4kA}{F} = e^{ika}\left[4k\cos k'a - 2ik\left(\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k}\right)\sin k'a\right].$$

Končno dobimo razmerje F/A:

$$\frac{F}{A} = \frac{1}{e^{ika}\left[\cos k'a - \frac{i}{2}\left(\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k}\right)\sin k'a\right]}.$$

Sedaj lahko izračunamo prepustnost T:

$$T = \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \frac{1}{\cos^2 k'a + \frac{1}{4}\left(\frac{k'}{k} + \frac{k}{k'}\right)^2 \sin^2 k'a} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 k'a + \frac{1}{4}\left(\frac{k'^2}{k^2} + \frac{k^2}{k'^2} + 2\frac{k'k}{kk'}\right)^2 \sin^2 k'a} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 k'a + \sin^2 k'a - \frac{1}{2}\sin^2 k'a + \frac{1}{4}\left(\frac{k'^2}{k^2} + \frac{k^2}{k'^2}\right)^2 \sin^2 k'a}.$$

Tako lahko zapišemo prepustnost potencialne jame:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{k'}{k} - \frac{k}{k'}\right)^2 \sin^2 k'a}$$

3 Energije da je T=1

Prepustnost je lahko enaka ena le v primeru, ko je $\sin k'a = 0$. V tem primeru velja:

$$k'a = n\pi,$$

če vstavimo zgoraj zapisano zvezo za k' dobimo izraz za energijo:

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2ma^2} - V_0 = E_n - V_0.$$

Zanimivo je, da ustreza energija E_n vezanim stanjem neskončne potencialne jame. Če bi imeli limitni primer neskončne potencialne jame bi se faza valovne funkcije pri prehodu med območji z različnim potencialom spremenila za π; pri celotnem prehodu skozi jamo (dvokratni odboj na stenah jame) bi torej pridelali fazo 2π, kar je pogoj za konstruktivno interferenco.