Koherentna stanja harmonskega oscilatorja

Ana Dergan

24. marec 2008

1 Koherentno stanje

Koherentno stanje je lastno stanje anihilacijskega operatorja:

$$a|z\rangle = z|z\rangle, \qquad z \in \mathbb{C} \qquad \text{lastna vrednost.} \tag{1}$$

Poiščemo ga tako, da ga razvijemo po lastnih stanjih Hamiltonovega operatorja:

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \qquad c_n = \langle n|z\rangle \tag{2}$$

Na enačbo (1) od leve delujemo z $\langle n|$:

$$\langle n|a|z\rangle = z\langle n|z\rangle$$
$$\langle a^\dagger n|z\rangle = z\langle n|z\rangle$$
$$\sqrt{n+1}\langle n+1|z\rangle = z\langle n|z\rangle$$
$$\sqrt{n+1}c_{n+1} = zc_n$$
$$c_n = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}c_0 \tag{3}$$

Dobili smo rekurzijsko zvezo za koeficiente razvoja. c_0 določimo iz normalizacijskega pogoja:

$$\langle z|z\rangle = 1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}|c_0|^2|z^3n|^2\langle n|n\rangle = 1$$
$$|c_0|^2 e^{|z|^2} = 1$$
$$|c_0| = e^{-\frac{|z^2|}{2}} = c_0$$

Koeficiente vstavimo v razvoj (2):

$$|z\rangle = \sum e^{-\frac{|z|^2}{2}} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{4}$$

2 Časovni razvoj koherentnega stanja

Ker smo naredili razvoj po lastnih stanjih Hamiltonovega operatorja, dobimo časovni razvoj enostavno tako, da vsakemu členu pritaknemo faktor $e^{-iE_n/\hbar}$.

$$|z,t\rangle = \sum e^{-\frac{|z|^2}{2}} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t}|n\rangle$$

Izraz $|z|$ smemo zamenjati z $|ze^{-i\omega t}|$, ker je $|e^{-i\omega t}| = 1$. Gornjo vsoto še malo preoblikujemo:

$$|z,t\rangle = e^{-i\omega t/2} \sum \frac{1}{\sqrt{n!}}(ze^{-i\omega t})^n e^{-|ze^{-i\omega t}|^2/2}$$

Če primerjamo dobljeni izraz s (4) ugotovimo, da je tudi $|z,t\rangle$ koherentno stanje. Njegova lastna vrednost je $ze^{-i\omega t}$.

3 Pričakovane vrednosti: $\langle x\rangle, \langle x^2\rangle, \langle p\rangle, \langle p^2\rangle$ in ustrezne nedoločenosti

Najprej si izpeljemo zvezo, ki nam bo koristila pri vseh nadaljnih izračunih.

$$\langle z|{a^\dagger}^n a^m|z\rangle = \langle a^n z|a^m z\rangle = (z^n)^* z^m \langle z|z\rangle = (z^n)^* z^m \tag{5}$$

Operatorje bomo izrazili z a in $a^\dagger$:

$$x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger)$$

$$x^2 = \frac{x_0^2}{2}(a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger + aa + aa^\dagger)$$

Za izračun $\langle aa^\dagger\rangle$ si s (5) ne moremo pomagati, zato $aa^\dagger$ izrazimo s pomočjo komutatorja: $aa^\dagger = 1 + a^\dagger a$. S pomočjo (5) tako dobimo:

$$\langle x\rangle = \langle z|x|z\rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(z^* + z) = x_0\sqrt{2}Re(z)$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{{x_0}^2}{2}(2z^*z + z^{*2} + z^2 + 1) = \frac{{x_0}^2}{2}((z + z^*)^2 + 1) = \frac{{x_0}^2}{2}((2Re(z))^2 + 1)$$

Izračunamo še nedoločenost:

$$\delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}$$

Pogledamo si še nedoločenost gibalne količine.
Najprej izrazimo gibalno količino in njen kvadrat z operatorjema a in $a^\dagger$:

$$p = p_0\frac{1}{\sqrt{2}i}(a - a^\dagger)$$

$$p^2 = -\frac{p_0^2}{2}(a^2 - aa^\dagger - a^\dagger a + {a^\dagger}^2)$$

Zdaj lahko izračunamo $\langle p\rangle$ in $\langle p^2\rangle$:

$$\langle p\rangle = p_0\frac{1}{\sqrt{2}i}(z - z^*) = \sqrt{2}p_0 Im(z)$$

$$\langle p^2\rangle = -\frac{p_0^2}{2}(z^2 - 1 - 2z^*z + z^{*2}) = -\frac{p_0^2}{2}((z - z^*)^2 - 1) = 2p_0^2 Im(z)^2 + \frac{p_0^2}{2}$$

Nedoločenost gibalne količine je:

$$\delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \frac{p_0}{\sqrt{2}}$$

Na koncu izračunamo produkt nedoločenosti koordinate x in gibalne količine:

$$\delta x\delta p = \frac{1}{2}p_0^2 x_0^2.$$

Ker med p_0 in x_0 obstaja povezava $p_0 = \frac{\hbar}{x_0}$, je produkt nedoločenosti ravno $\hbar/2$. V eni izmed prejšnjih nalog pa smo dokazali, da ima najmanjši možen produkt nedoločenosti koordinate in gibalne količine valovna funkcija Gaussove oblike. Tako smo pokazali, da je koherentno stanje harmonskega oscilatorja:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x_0^2\pi}}exp(-\frac{(x - \sqrt{2}x_0 Re(z))^2}{2x_0^2})exp(\frac{i\sqrt{2}p_0 Im(z)x}{\hbar})$$