Kvantna mehanika I – vaje

Perturbacija IV

Andraž Krajnc

8. maj 2008

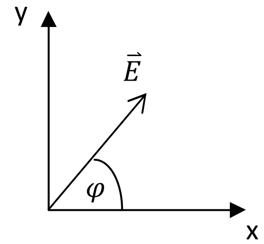
Oceni popravek energije osnovnega stanja izotropnega dvodimenzionalnega harmonskega oscilatorja

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}k\vec{r}^2$$

v homogenem zunanjem električnem polju. Uporabi najnižji red teorije motnje, ki da netrivialne rezultate.

Rešitev:

Zaradi homogenega električnega polja je v našem primeru potencial V = -eE$\vec{r}$.



$$H = \underbrace{\frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2}_{H_{x0}} - \underbrace{eE\cos\varphi \cdot x}_{V_x} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}ky^2 - eE\sin\varphi \cdot y$$

Če naredimo rotacijo koordinatnega sistema za kot φ, si bomo olajšali računanje popravkov energije. V splošnem namreč $\left|\langle m|V_x + V_y|n\rangle\right|^2$ ni enak le $|\langle m|V_x|n\rangle|^2 + \left|\langle m|V_y|n\rangle\right|^2$, temveč dobimo še mešane člene tipa $\left|\langle m|V_x|n\rangle\langle m|V_y|n\rangle\right|$, ki niso vedno enaki 0 (za ta primer slučajno so).

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 - eEx + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}ky^2$$

Lastne energije za naš harmonski oscilator v homogenem magnetnem polju so:

$$E_n = \underbrace{E^{(0)}}_{\text{osnovna energija}} + \underbrace{E^{(1)} + E^{(2)}}_{\text{popravka}}$$

Za harmonski oscilator so osnovne energije:

$$E_n^{(0)} = \hbar\omega(n_x + n_y + 1)$$

Računanje prvega popravka

$$E_n^{(1)} = \langle n_x|V|n_x\rangle = \langle n_x|-eEx|n_x\rangle$$

$x = x_0\frac{a+a^+}{\sqrt{2}}$ - Pri izračunu uporabimo operator lege.

$$E_n^{(1)} = -eE\frac{x_0}{\sqrt{2}}\langle n_x|a+a^+|n_x\rangle = -eE\frac{x_0}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{n_x}\langle n_x|n_x-1\rangle + \sqrt{n_x+1}\langle n_x|n_x+1\rangle\right)$$

ker $\langle n_x|n_x-1\rangle = 0$ in $\langle n_x|n_x+1\rangle = 0,\ E_n^{(1)} = 0$.

Računanje drugega popravka

$$E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n}\frac{|\langle m|V|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

$$\langle m_x|V|n_x\rangle = \langle m_x|-eE\cos\varphi\cdot x|n_x\rangle = -eE\frac{x_0}{\sqrt{2}}\langle m_x|a+a^+|n_x\rangle$$
$$= -eE\frac{x_0}{\sqrt{2}}(\sqrt{n_x}\langle m_x|n_x-1\rangle + \sqrt{n_x+1}\langle m_x|n_x+1\rangle)$$

$\langle m_x|n_x-1\rangle$ in $\langle m_x|n_x+1\rangle$ lahko zapišemo z deltami.

$$\langle m_x|V|n_x\rangle = -eE\frac{x_0}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{n_x}\delta_{m_x,n_x-1} + \sqrt{n_x+1}\delta_{m_x,n_x+1}\right)$$

$$|\langle m_x|V|n_x\rangle|^2 = e^2E^2\frac{x_0^2}{2}(n_x\delta_{m_x,n_x-1} + (n_x+1)\delta_{m_x,n_x+1})$$

Zgornji izraz bo različen od nič le, ko bo a) $m_x = n_x-1$ oz. b) $m_x = n_x+1$!

a) $E_n^{(0)} - E_m^{(0)} = E_n^{(0)} - E_{n-1}^{(0)} = \hbar\omega\left(n_x+\frac{1}{2}\right) - \hbar\omega\left(n_x-1+\frac{1}{2}\right) = \hbar\omega$

b) $E_n^{(0)} - E_m^{(0)} = E_n^{(0)} - E_{n+1}^{(0)} = \hbar\omega\left(n_x+\frac{1}{2}\right) - \hbar\omega\left(n_x+1+\frac{1}{2}\right) = -\hbar\omega$

Drugi popravek je torej:

$$E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n}\frac{e^2E^2\frac{x_0^2}{2}(n_x\delta_{m_x,n_x-1} + (n_x+1)\delta_{m_x,n_x+1})}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} = \frac{e^2E^2\frac{x_0^2}{2}n_x}{\hbar\omega} + \frac{e^2E^2\frac{x_0^2}{2}(n_x+1)}{-\hbar\omega}$$
$$= -\frac{e^2E^2x_0^2}{2\hbar\omega}$$

Lastne energije so torej:

$$E_n = \hbar\omega(n_x+n_y+1) - \frac{e^2E^2\cos^2\varphi\cdot x_0^2}{2\hbar\omega} - \frac{e^2E^2\sin^2\varphi\cdot x_0^2}{2\hbar\omega} = \underline{\underline{\hbar\omega(n_x+n_y+1) - \frac{e^2E^2x_0^2}{2\hbar\omega}}}$$