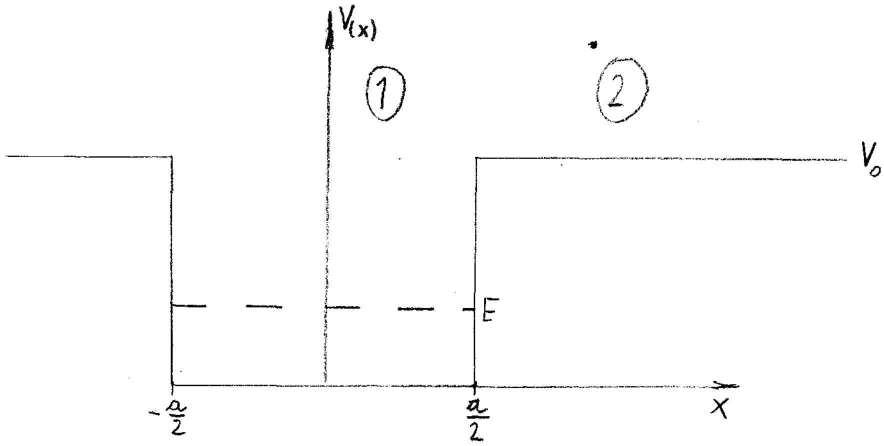



$\Psi_1(x) = B\cos kx$ za sode

$\Psi_1(x) = A\sin kx$ za lihe

$\Psi_2(x) = \tilde{A}\, e^{-\tilde{k}x}$

$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ $\quad \tilde{k} = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$ $\quad E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}$

Funkcija $\Psi$ mora biti na robu zvezna in zvezno odvedljiv

Dobimo:

$$\Psi_1(\tfrac{a}{2}) = \Psi_2(\tfrac{a}{2}) \qquad \Psi_1'(\tfrac{a}{2}) = \Psi_2'(\tfrac{a}{2})$$

$$\left.\begin{array}{l} B\cos k\frac{a}{2} = \tilde{A}\, e^{-\tilde{k}\frac{a}{2}} \\ -Bk\sin k\frac{a}{2} = -\tilde{A}\tilde{k}\, e^{-\tilde{k}\frac{a}{2}} \end{array}\right] : \qquad \left.\begin{array}{l} A\sin k\frac{a}{2} = \tilde{A}\, e^{-\tilde{k}\frac{a}{2}} \\ Ak\cos k\frac{a}{2} = -\tilde{A}\tilde{k}\, e^{-\tilde{k}\frac{a}{2}} \end{array}\right] :$$

Po deljenju robnih pogojev za sode in lihe funkcije dobimo dve enačbi

$$k\,\mathrm{tg}(k\tfrac{a}{2}) = \tilde{k}$$

$$k\,\mathrm{ctg}(k\tfrac{a}{2}) = -\tilde{k}$$

Uvedemo novi spremenljivki. $ka = x$, $\tilde{k}a = \tilde{x}$

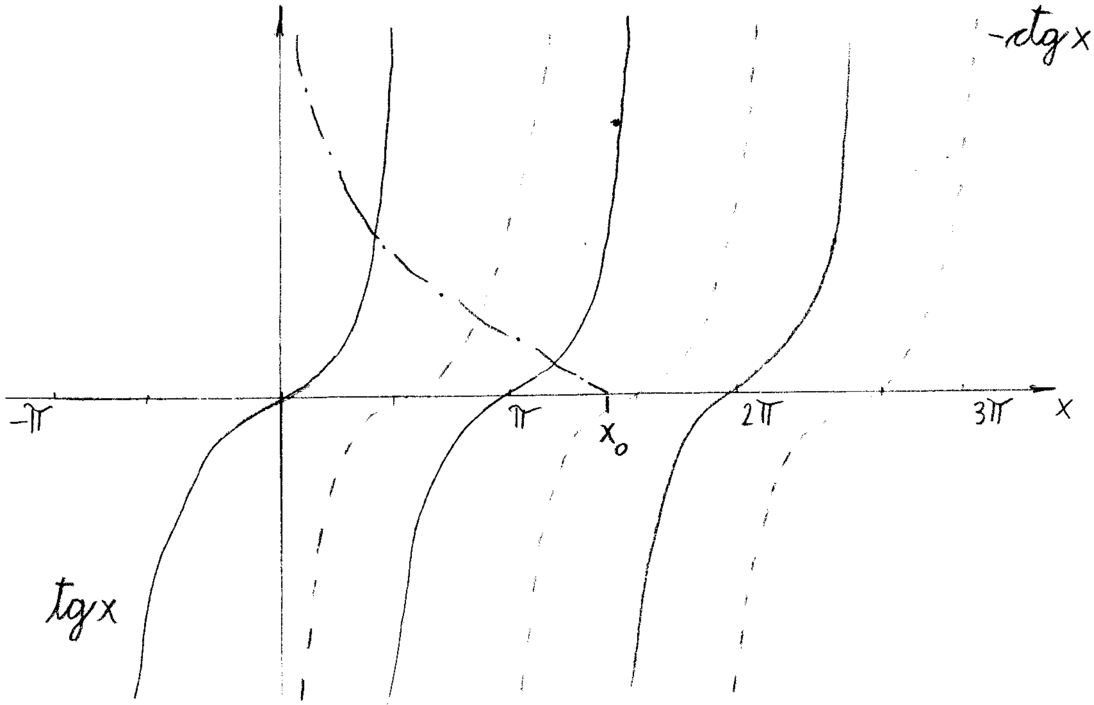
$$x^2 + \tilde{x}^2 = \frac{2mEa^2}{\hbar^2} + \frac{2m(V_0-E)a^2}{\hbar^2} = \frac{2ma^2V_0}{\hbar^2} = x_0^2$$

Naši enačbi se tako predelata v:

$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{x_0^2}{x^2} - 1}$ za sode

$-\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{x_0^2}{x^2} - 1}$ za lihe

Rešitvi poiščemo grafično.




Iz skice vidimo, da rešitev za sodo funkcijo vedno obstaja
Pogoj za obstoj prvega vzbujenega stanja je $x_0^2 > \pi^2$ iz česar
sledi $\frac{2ma^2V_0}{\hbar^2} > \pi^2$ in dalje $V_0 > \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$

Poglejmo kaj se zgodi če potencial $V_0$ pošljemo proti $\infty$.

$V_0 \to \infty$

$x_0 \to \infty$

Rešitve v grafu se premaknejo k $\pi, 2\pi, 3\pi\ldots$

$$x = n\pi$$

$$\sqrt{\frac{2mEa^2}{\hbar^2}} = n\pi$$

$$E = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

Rezultat ustreza vezanim stanjem neskončne potencialne jame

Poglejmo si še limitni primer, ko gre $a \to 0$, pri čemer upoštevamo $aV_0 = \text{konst.}$

Naša jama je $\delta$ funkcija.

$$\underset{\Downarrow\, 0}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}} = \sqrt{\frac{x_0^2}{x^2} - 1}$$

$x_0$ gre proti nič, zato gre tudi $x$ proti nič in je zato samo malo manjši od $x_0$. Zapišemo: $x = x_0 - \varepsilon$

$$\mathrm{tg}\,\frac{x_0 - \varepsilon}{2} = \frac{x_0 - \varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{x_0^2}{(x_0 - \varepsilon)^2} - 1} = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon}{x_0} - 1} = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{x_0}}$$

$$\frac{x_0}{2} = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{x_0}}$$

$$\varepsilon = \left(\frac{x_0}{2}\right)^3$$

$$E = \frac{\hbar^2 x^2}{2ma^2} = \frac{\hbar^2 \left(x_0 - \left(\frac{x_0}{2}\right)^3\right)^2}{2ma^2} = \frac{\hbar^2 \left(x_0^2 - \frac{1}{4} x_0^4\right)}{2ma^2} = V_0 - \frac{m a^2 V_0^2}{2\hbar^2}$$