Kvantna mehanika
Domaca naloga
april 2008
Matic Ocepek

Spin II

NALOGA:

Gibanje elektrona v dvodimenzionalnem elektronskem plinu opisuje Hamiltonjan
$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m}$
kjer je $\vec{p} = (p_x, p_y)$ s $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial_x}$ in $p_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial_y}$ operator gibalne količine delca.
Določi lastne energije in zapiši lastne funkcije elektrona v dvodimenzionalnem elektronskem plinu!

V nekaterih sistemih igra pomembno vlogo tudi sklopitev med tirno in spinsko vrtilno količino elektrona. Take sisteme opišemo z Rashbinim Hamiltonijanom
$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \lambda\,(\sigma_x\, p_y - \sigma_y\, p_x)$.
kjer sta σ_x in σ_y Paulijevi matriki.
Kakšne so lastne energije in lastne funkcije elektrona, katerega gibanje opisuje Rashbin Hamiltonjan? Namig: Kot nastavek uporabi spinor
$\psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}$, kjer je $\vec{r} = (x, y)$ položaj delca.
V katero smer je obrnjen spin elektrona v lastnih stanjih, ki jih opisuje zgornji nastavek?

REŠITEV:

Pri nalogi bomo potrebovali nekatere že znane količine

- odvoda gibalne količine

$$p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial_x}$$

$$p_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial_y}$$

- Paulijeve matrike

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Ker je problem dvodimenzionalni mora veljati tudi

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Zapišem Hamiltonko in vstavim zgornje količine

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2\,m} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y}\right) - \lambda \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Ker seštevam skalar in matriko,
moram prvi del enačbe pomnožiti še z identiteto, da dobim matriko

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\,m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \cdot I + -i\hbar\lambda\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]$$

Enačbo pomnožim z identiteto in zapišem po komponentah in upoštevam zvezo

$$H \mid \psi > \; = \; E \mid \psi >$$

in ψ je oblike

$$\psi = \begin{pmatrix} A\,(\vec{r}) \\ B\,(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

Kot rezultat dobim

$$\begin{pmatrix} -\frac{\hbar^2}{2\,m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) & -i\hbar\lambda \frac{\partial}{\partial y} + \hbar\lambda \frac{\partial}{\partial x} \\ -i\hbar\lambda \frac{\partial}{\partial y} - \hbar\lambda \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\hbar^2}{2\,m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A\,(\vec{r}) \\ B\,(\vec{r}) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} A\,(\vec{r}) \\ B\,(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

2 D matriki na obeh straneh pomnožim in dobim 2 parcialni diferencialni enačbi II. reda

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) A\,(\vec{r}) + \lambda\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + \hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) B\,(\vec{r}) = E \cdot A\,(\vec{r}) \quad (1)$$

$$-\lambda\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + \hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) A\,(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2\,m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) B\,(\vec{r}) = E \cdot B\,(\vec{r}) \quad (2)$$

Za reševanje uporabim spinor nastavek

$$A\,(\vec{r}) = A e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$B\,(\vec{r}) = B e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Če odvajam nastavka po x in y

$$\frac{\partial}{\partial x} A\,(\vec{r}) = i k_x A\,(\vec{r})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} B\,(\vec{r}) = i k_y B\,(\vec{r})$$

in druga odvoda

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A\,(\vec{r}) = -k_x^2 A\,(\vec{r})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} B\,(\vec{r}) = -k_y^2 B\,(\vec{r})$$

ker je problem 2 D velja tudi $k_x^2 + k_y^2 = k^2$

Nastavka nesem v enačbi (1) in (2) in sproti pokrajšam še ekponente na obeh straneh rezultat sta navadni enačbi

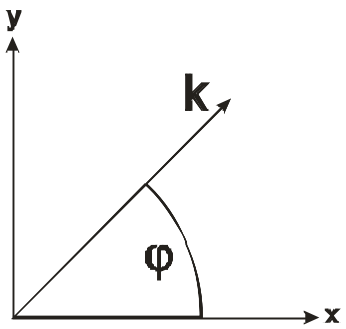
$$+\frac{\hbar^2}{2\,m}\,k^2\,A + \lambda\hbar k_y\,B + i\lambda\hbar k_x\,B = E\cdot A$$

$$\lambda\hbar k_y\,A - \lambda i\hbar k_x\,A + \frac{\hbar^2}{2\,m}\,k^2\,B = E\cdot B$$

Spet sestavim matriko

$$\begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{2\,m}\,(k_x^2 + k_y^2) & i\hbar\lambda\,(-i k_y + k_x) \\ i\hbar\lambda\,(-i k_y - k_x) & \frac{\hbar^2}{2\,m}\,(k_x^2 + k_y^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = E\cdot\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Uvedem polarne koordinate :



$$k_x = k\cdot\cos\varphi$$
$$k_y = k\cdot\sin\varphi$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\hbar^2\,k^2}{2\,m} & i k\hbar\lambda e^{-i\varphi} \\ -i k\hbar\lambda e^{i\varphi} & \frac{\hbar^2\,k^2}{2\,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = E\cdot\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Poiščem determinanto tega izraza

$$H\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \Longrightarrow (H - E\cdot I)\cdot\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\hbar^2\,k^2}{2\,m} - E = \pm\lambda\hbar k$$

Izrazim energijo elektrona

$$E = \frac{\hbar^2\,k^2}{2\,m} \mp \lambda\hbar k$$

To energijo sedaj uporabim v enačbi (3) da dobim še lastne funckije elektrona
Ker sta za energijo elektrona dve možnosti (plus in minus), rešujem vsako posebej

ENERGIJA S PLUSOM

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2 m} + \lambda\hbar k$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda\hbar k & i k\hbar\lambda e^{-i\varphi} \\ -i k\hbar\lambda e^{i\varphi} & -\lambda\hbar k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

Lastna vektorja tega izraza sta

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

iz česar lahko zapišem prvo valovno funkcijo ψ_+ za elektron

$$\psi_+ = \cos\frac{\vartheta}{2} \; |\uparrow\rangle - \sin\frac{\vartheta}{2} e^{i\phi} \; |\downarrow\rangle$$

ENERGIJA Z MINUSOM

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2 m} - \lambda\hbar k$$

$$\begin{pmatrix} \lambda\hbar k & i k\hbar\lambda e^{-i\varphi} \\ -i k\hbar\lambda e^{i\varphi} & \lambda\hbar k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

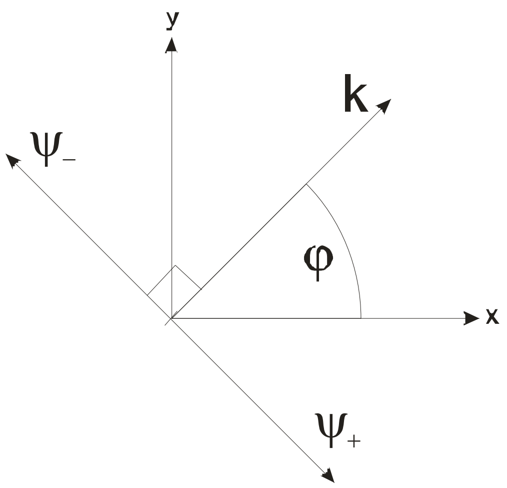
Lastna vektorja tega izraza sta

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

iz česar lahko zapišem drugo valovno funkcijo ψ_- za elektron

$$\psi_- = \cos\frac{\vartheta}{2} \; |\uparrow\rangle + \sin\frac{\vartheta}{2} e^{i\phi} \; |\downarrow\rangle$$

Spin elektrona v lastnih stanjih je po zgornjih nastavkih pravokoten na valovni vektor $\vec{k}$, kar je razvidno s slike



Za kota sem uporabil $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ in $\phi = \varphi + \frac{\pi}{2}$.