Domača naloga - Kvantna mehanika

Martin Rigler

12. maj 2008

Naloga: Imamo dva delca s spinom $S = 1$. Prvemu izmerimo komponento spina v smeri osi x, drugemu pa komponento spina v smeri osi y. Rezultat meritve (meritev A) je v obeh primerih $\hbar$.

1. Za vsakega od obeh delcev zapiši valovno funkcijo po meritvi v bazi z dobrima velikostima spina delca in njegovo komponento v smeri osi z.

2. Zapiši skupno valovno funkcijo obeh delcev v bazi z dobrima velikostima spinov vsakega od delcev in dobrima komponentama obeh spinov v smeri osi z.

3. Po meritvi A na sistemu obeh delcev opravimo meritev skupne komponente spina v smeri osi z (meritev B). S kolikšno verjetnostjo dobimo rezultat $2\hbar$?

4. S kolikšno verjetnostjo pa izmerimo kvadrat velikosti skupne vrtilne količine enak 0, če to meritev opravimo po meritvi A ali pa po meritvi B, pri kateri dobimo rezultat $2\hbar$?

Rezultat:

1. Valovno funkcijo za naš delec posebej razvijemo po bazi, kjer so spini lahko 1,0 in -1. Skupna valovna funkcija obeh delcev skupaj bo kar njun produkt.

$$S_x |\psi\rangle = \hbar |\psi\rangle$$
$$S_y |\psi\rangle = \hbar |\psi\rangle$$

$$|\psi\rangle = A |1\rangle + B |0\rangle + C |-1\rangle$$

Projekcije spina S_x in S_y zamenjajmo s operatorjema S_+ in S_-.

$$S_+ = S_x + iS_y$$

$$S_- = S_x - iS_y$$

Torej projekcijo spina na x nadomestimo z $\frac{1}{2}(S_+ + S_-)$. Rešujmo enačbo:

$$\frac{1}{2}(S_+ + S_-)(A|1\rangle + B|0\rangle + C|-1\rangle) = \hbar(A|1\rangle + B|0\rangle + C|-1\rangle)$$

$$\frac{A}{2}\hbar\sqrt{2}\,|0\rangle + \frac{B}{2}\hbar\sqrt{2}(|1\rangle + |-1\rangle) + \frac{C}{2}\hbar\sqrt{2}\,|0\rangle = \hbar(A|1\rangle + B|0\rangle + C|-1\rangle)$$

$|1\rangle : \frac{\sqrt{2}}{2}B = A$
$|-1\rangle : \frac{\sqrt{2}}{2}B = C$
$|0\rangle : \frac{\sqrt{2}}{2}A + \frac{\sqrt{2}}{2}C = B$

Iz enačb za $|1\rangle$ in $|-1\rangle$ z B izrazimo A in C, z enačbo za $|0\rangle$ pa si ne moremo pomagati, saj je le indetiteta za B. Neznanko B dobimo iz pogoja za normalizacijo valovne funkcije.

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}B\,|1\rangle + B\,|0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}B\,|-1\rangle$$

$$\langle\psi\,|\psi\rangle = 1$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Valovna funkcija za 1. delec je:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}\,|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle + \frac{1}{2}B\,|-1\rangle$$

Za 2. delec uporabimo namesto projekcije spina na y enačbo $\frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$ ter z enakim postopkom kot za 1. delec izračunamo valovno funkcijo:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}\,|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\,|0\rangle - \frac{1}{2}B\,|-1\rangle$$

2. Valovno funkcijo za oba delca skupaj v bazi velikosti obeh spinov zapišemo kot produkt:

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \cdot |\psi_2\rangle$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{4}\,|1\rangle\,|1\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,|0\rangle\,|1\rangle + \frac{1}{4}\,|-1\rangle\,|1\rangle +$$

$$+\frac{i}{2\sqrt{2}}\,|1\rangle\,|0\rangle + \frac{i}{2}\,|0\rangle\,|0\rangle + \frac{i}{2\sqrt{2}}\,|-1\rangle\,|0\rangle -$$

$$-\frac{1}{4}\,|1\rangle\,|-1\rangle - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,|0\rangle\,|-1\rangle - \frac{1}{4}\,|-1\rangle\,|-1\rangle$$

Nova baza z dobrima velikostima spinov vsakega od delcev in dobrima komponentama obeh spinov v smeri osi z je naslednja:
$[S, S_z\rangle$
$[0, 0\rangle$
$[1, 1\rangle$ $[1, 0\rangle$ $[1, -1\rangle$
$[2, 2\rangle$ $[2, 1\rangle$ $[2, 0\rangle$ $[2, -1\rangle$ $[2, -2\rangle$

Pri zapisu v novo bazo si pomagamo s tabelo CLEBSCH-GORDANovih koeficientov. Npr. koeficient pred novim baznim vektorjem $[0, 0\rangle$ dobimo, tako da pomnožimo ustrezne C-G koeficiente z ustreznimi koeficienti, ki so pred vektorji stare baze. Koeficient za $[0, 0\rangle$ je torej: $-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{i}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{i}{2\sqrt{3}}$

V novi bazi izgleda valovna funcija takole:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{4}[2, 2\rangle + \frac{1}{4}(1+i)[2, 1\rangle + \frac{1}{4}(-1+i)[1, 1\rangle +$$
$$+\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{i}{2}[2, 0\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}[1, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{i}{2}[0, 0\rangle +$$
$$+\frac{1}{4}(-1+i)[2, -1\rangle - \frac{1}{4}(1+i)[1, -1\rangle - \frac{1}{4}[2, -2\rangle$$

Vsota kvadratov koeficentov, ki stojijo pred novimi baznimi vektorji, je seveda 1.

3. Verjetnost, da dobimo pri meritvi skupne velikosti spina $2\hbar$, je enaka $\frac{1}{16}$. Verjetnost dobimo s kvadriranjem koeficienta, ki stoji pred baznim vektorjem $|1\rangle |1\rangle$ (velikosti obeh spinov), ki nam edini lahko da skupni spin enak $2\hbar$.

4. Verjetnost, da izmerimo skupni kvadrat vrtilne količine 0, nam da kvadrat koeficienta, ki stoji pred baznim vektorjem $[0, 0\rangle$. Verjetnost je $\frac{1}{12}$.

   Da izračunamo verjetnost, da po meritvi B izmerimo kvadrat vrtilne količine 0, moramo upoštevati, da sta delca po meritvi v stanju $|0\rangle |0\rangle$. Ker novi bazni vektor $[0, 0\rangle$ dobimo s koeficienti iz vektorjev iz stare baze $|1\rangle |-1\rangle$, $|0\rangle |0\rangle$ in $|-1\rangle |1\rangle$, ugotovimo, da je ta verjetnost enaka 0.