Vrtilna količina II

Matej Podergajs, 28030214

6. maj 2008

1 Naloga:

- Zapiši operator, ki transformira valovno funkcijo v podprostoru $l = 1$ iz baze lastnih funkcij operatorja L_z v bazo lastnih funkcij operatorja L'_z kjer je kot med osema z in z' enak φ.
- Delec z vrtilno količino $l = 1$, ki se giblje v krogelno simetričnem potencialu, je v stanju $m = 1$. Ob $t = 0$ vklopimo homogeno magnetno polje v ravnini xz pod kotom φ glede na os z. Ob času π/ω_L (ω_L je Larmorjeva frekvenca) izmerimo projekcijo vrtilne količine delca na os z. Kolikšna je pričakovana vrednost meritve? S kolikšno verjetnostjo dobimo katerega od možnih rezultatov meritve?

2 Rešitev:

Imamo delec, ki ga ob $t = 0$ predstavimo z valovno funkcijo $|11\rangle$, kar je v vektorskem zapisu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Njegova vrtilna količina ob $t = 0$ kaže v z smeri (os z koordinatnega sistema, ki ga označimo brez črtice, smo usmerili tako, da kaže v smeri vrtilne količine delca ob $t = 0$). Definiramo koordinatni sistem s črtico, ki ga dobimo z vrtenjem koordinatnega sistema brez črtice za kot φ okrog osi y. Ob $t = 0$ vklopimo zunanje homogeno magnetno polje z gostoto B_0, ki kaže v smeri osi z'. Časovni razvoj valovne funkcije za $t > 0$ je

$$|11,t\rangle = -\sin^2(\varphi/2)|1-1\rangle' e^{-i\gamma B_0 t} + (1/\sqrt{2})\sin\varphi|10\rangle' - \cos^2(\varphi/2)|11\rangle' e^{i\gamma B_0 t}.$$

Za izpeljavo glej nalogo Vrtilna količina I.

Transformirajmo valovno funkcijo v podprostoru $l = 1$ iz baze lastnih funkcij operatorja L_z v bazo lastnih funkcij operatorja L'_z (transformacijo delamo, ker znamo $|11,t\rangle$ razviti po lastnih funkcijah operatorja L'_z, po lastnih funkcijah operatorja L_z pa ne). Pri tem je kot med osema z in z' ter med x in x' enak φ, osi y in y' pa sovpadata. To transformacijo opravimo s tole funkcijo operatorja: $e^{i\frac{\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\varphi}}{\hbar}}$. Operatorja $\mathbf{L}$ in $\boldsymbol{\varphi}$ sta v koordinatnem zapisu:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_x & L_y & L_z \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & \varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Transformacijo valovne funkcije torej opravimo z funkcijo operatorja $e^{i\frac{\varphi L_y}{\hbar}}$, ki jo moramo razviti v potenčno vrsto, da z njo lahko delujemo na valovno funkcijo:

$$e^{i\frac{\varphi L_y}{\hbar}} = 1 + \frac{i\varphi L_y}{\hbar} + \frac{1}{2!}\left(\frac{i\varphi L_y}{\hbar}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{i\varphi L_y}{\hbar}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{i\varphi L_y}{\hbar}\right)^4 + \frac{1}{5!}\left(\frac{i\varphi L_y}{\hbar}\right)^5 + \dots$$

L_y zapišemo z L_+ in L_-, za katera vemo kaj naredita z lastnimi funkcijami operatorja L_z:

$$L_+ = L_x + iL_y,$$
$$L_- = L_x - iL_y,$$

torej

$$L_y = \frac{L_+ - L_-}{2i}.$$

Delujmo z operatorjema L_+ in L_- na lastne funkcije operatorja L_z v podprostoru $l = 1$:

$$L_+|11\rangle = 0,$$
$$L_+|10\rangle = \sqrt{2}\hbar|11\rangle,$$
$$L_+|1-1\rangle = \sqrt{2}\hbar|10\rangle,$$
$$L_-|11\rangle = \sqrt{2}\hbar|10\rangle,$$
$$L_-|10\rangle = \sqrt{2}\hbar|1-1\rangle,$$
$$L_-|1-1\rangle = 0.$$

Operator lahko zapišemo kot matriko, valovno funkcijo kot vektor, delovanje operatorja na valovno funkcijo pa potem zapišemo kot množenje matrike in vektorja. Matriko, ki predstavlja operator $iL_y/\hbar$ v podprostoru $l = 1$ zapišemo takole:

$$\begin{bmatrix} \langle 11|\frac{iL_y}{\hbar}|11\rangle & \langle 11|\frac{iL_y}{\hbar}|10\rangle & \langle 11|\frac{iL_y}{\hbar}|1-1\rangle \\ \langle 10|\frac{iL_y}{\hbar}|11\rangle & \langle 10|\frac{iL_y}{\hbar}|10\rangle & \langle 10|\frac{iL_y}{\hbar}|1-1\rangle \\ \langle 1-1|\frac{iL_y}{\hbar}|11\rangle & \langle 1-1|\frac{iL_y}{\hbar}|10\rangle & \langle 1-1|\frac{iL_y}{\hbar}|1-1\rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Delovanje operatorja $\left(\frac{iL_y}{\hbar}\right)^2$ predstavimo s tole matriko:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Operator $\left(\frac{iL_y}{\hbar}\right)^3$ predstavimo z matriko

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

ki se le za predznak razlikuje od matrike za $iL_y/\hbar$. Lahko zapišemo:

$$
\begin{aligned}
e^{i\frac{\varphi L_y}{\hbar}} &= 1+\varphi\frac{iL_y}{\hbar}+\frac{\varphi^2}{2!}\left(\frac{iL_y}{\hbar}\right)^2-\frac{\varphi^3}{3!}\left(\frac{iL_y}{\hbar}\right)-\frac{\varphi^4}{4!}\left(\frac{iL_y}{\hbar}\right)^2+\frac{\varphi^5}{5!}\left(\frac{iL_y}{\hbar}\right)+\ldots=\\
&= 1+\frac{iL_y}{\hbar}\left[\varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\ldots\right]+\left(\frac{iL_y}{\hbar}\right)^2\left[\frac{\varphi^2}{2!}-\frac{\varphi^4}{4!}+\ldots\right]=\\
&= 1+\frac{iL_y}{\hbar}\sin\varphi+\left(\frac{iL_y}{\hbar}\right)^2[1-\cos\varphi]=\\
&= 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}(1-\cos\varphi)\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&-2&0\\1&0&-1\end{bmatrix}=\\
&= \begin{bmatrix}\cos^2(\frac{\varphi}{2})&\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi&\sin^2(\frac{\varphi}{2})\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi&\cos\varphi&\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\\\sin^2(\frac{\varphi}{2})&-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi&\cos^2(\frac{\varphi}{2})\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Sedaj lahko zapišemo začetno stanje valovne funkcije v sistemu s črtico:

$$
\begin{bmatrix}\cos^2(\frac{\varphi}{2})&\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi&\sin^2(\frac{\varphi}{2})\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi&\cos\varphi&\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\\\sin^2(\frac{\varphi}{2})&-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi&\cos^2(\frac{\varphi}{2})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2(\frac{\varphi}{2})\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\\\sin^2(\frac{\varphi}{2})\end{bmatrix}.
$$

Naredimo časovni razvoj začetnega stanja valovne funkcije v sistemu s črtico:

$$
\begin{bmatrix}\cos^2(\frac{\varphi}{2})e^{i\omega_L t}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\\\sin^2(\frac{\varphi}{2})e^{-i\omega_L t}\end{bmatrix},\omega_L=\gamma B_0.
$$

Ob času π/ω_L je valovna funkcija v sistemu s črtico enaka

$$
\begin{bmatrix}-\cos^2(\frac{\varphi}{2})\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\\-\sin^2(\frac{\varphi}{2})\end{bmatrix}.
$$

Sedaj gremo nazaj v sistem brez črtice, saj ob času π/ω_L izmerimo projekcijo vrtilne količine na os z. To storimo tako, da na valovno funkcijo delujemo z funkcijo operatorja $e^{i\frac{(-\varphi)L_y}{\hbar}}$, ki ga v matrični obliki zapišemo kot

$$
\begin{bmatrix}\cos^2(\frac{\varphi}{2})&-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi&\sin^2(\frac{\varphi}{2})\\\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi&\cos\varphi&-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\\\sin^2(\frac{\varphi}{2})&\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi&\cos^2(\frac{\varphi}{2})\end{bmatrix}.
$$

Pretransformirajmo torej valovno funkcijo v sistem brez črtice:

$$
\begin{bmatrix}\cos^2(\frac{\varphi}{2})&-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi&\sin^2(\frac{\varphi}{2})\\\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi&\cos\varphi&-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\\\sin^2(\frac{\varphi}{2})&\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi&\cos^2(\frac{\varphi}{2})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\\-\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\cos^2\varphi\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\varphi\\-\sin^2\varphi\end{bmatrix},
$$

vmes smo uporabili zveze med kotnimi funkcijami dvojnih kotov. Operator L_z v podprostoru $l=1$ zapišimo kot matriko:

$$
\begin{bmatrix}\langle 11|L_z|11\rangle&\langle 11|L_z|10\rangle&\langle 11|L_z|1-1\rangle\\\langle 10|L_z|11\rangle&\langle 10|L_z|10\rangle&\langle 10|L_z|1-1\rangle\\\langle 1-1|L_z|11\rangle&\langle 1-1|L_z|10\rangle&\langle 1-1|L_z|1-1\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hbar&0&0\\0&0&0\\0&0&-\hbar\end{bmatrix}.
$$

Izračunajmo pričakovano vrednost projekcije vrtilne količine na z os:

$$\begin{bmatrix} -\cos^2\varphi \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\varphi \\ -\sin^2\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos^2\varphi \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\varphi \\ -\sin^2\varphi \end{bmatrix} = \hbar\cos^4\varphi - \hbar\sin^4\varphi = \hbar\cos 2\varphi.$$

To bi tudi klasično pričakovali. Vendar meritev ne da pričakovane vrednosti, ampak eno od lastnih vrednosti operatorja L_z. Verjetnost, da pri posamezni meritvi izmerimo eno od lastnih vrednosti operatorja L_z so:

$$P(L_z = \hbar) = \cos^4\varphi,$$

$$P(L_z = 0) = \frac{1}{2}\sin^2(2\varphi),$$

$$P(L_z = -\hbar) = \sin^4\varphi.$$

Dobimo jih, če kvadriramo absolutno vrednost koeficientov (pri nas so ti koeficienti realni in jih le kvadriramo) v razvoju naše valovne funkcije ob času $t = \pi/\omega_L$, v sistemu brez črtice. Pri tem $P(L_z = \hbar)$ pomeni verjetnost, da pri meritvi projekcije vrtilne količine delca na os z izmerimo vrednost $\hbar$.