# Dvodimenzionalni harmonski oscilator

Denis Golež
Kvantna fizika 1

14. maj 2008

**Povzetek**

Obravnavaj lastna stanja dvodimenzionalnega harmonskega oscilatorja

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}a_x x^2 + \frac{1}{2}a_y y^2$$

V primeru, ko je $a_x = a_y$ poišči taka stanja, ki so hkrati tudi lastna stanja vrtilne količine okoli z osi

$$L = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

## 1 Lastna stanja 2D harmoničnega oscilatorja

Hamiltonian za 2D oscilator v koordinatah zapišemo kot

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}a_x x^2 + \frac{1}{2}a_y y^2$$

Ta hamiltonian lahko razstavimo na vsoto dve neodvisnih hamiltonianov $H = H_x + H_y$, kjer sta $H_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}a_x x^2$ in $H_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}a_y y^2$. V tem primeru lahko celotno lastno funkcijo zapišemo kot produkt lastnih funkcij za posamezen hamiltonian: $\Psi = \Psi_x\Psi_y$. Upoštevajoč, da je $H_x\Psi = E_x\Psi$ in podobno za y koordinato lahko napišemo:

$$(H_x + H_y)\Psi_x\Psi_y = E\Psi_x\Psi_y$$

$$(H_x\Psi_x)\Psi_y + (H_y\Psi y)\Psi x = E\Psi x\Psi y$$

$$(E_x + E_y)\Psi_x\Psi_y = E\Psi_x\Psi_y \Rightarrow E = E_x + E_y$$

Ker že poznamo energije enodimenzionalnega harmonskega oscilatorja lahko tako napišemo

$$H = \hbar(\omega_x(n_x + \frac{1}{2}) + \omega_y(n_y + \frac{1}{2}))$$

in lastna funkcija za 2D harminski oscilator je

$$|\Psi\rangle = |n_x\rangle|n_y\rangle = |n_x n_y\rangle$$

Ker imamo lastne funkcije lahko razvijemo $\Psi$ po le-teh

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_x,n_y=0}^{\infty} c_{n_x n_y}|n_x n_y\rangle$$

$$c_{n_x n_y} = \langle n_x n_y|\Psi\rangle$$

in časovni razvoj funkcije

$$|\Psi, t\rangle = \sum_{n_x,n_y=0}^{\infty} c_{n_x n_y} e^{-\frac{iE_{n_x n_y} t}{\hbar}}|n_x n_y\rangle$$

# 2 Posebni primeri

## 2.1 $a_x > 0, a_y = 0$

V smeri y nimamo potenciala in lastno funkcijo predstavlja ravni val, v smeri x pa imamo vezano n-to lastno stanje harmonskega oscilatorja. Tako je celotna lastna funkcija

$$\langle xy|\Psi\rangle = \Psi_n(x)e^{ik_y y}$$

kjer sta $|\Psi_n\rangle = \frac{a_x^{+n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle$ in $k_y = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE_y}$ Energija je tako enaka

$$E = E_x + E_y = \frac{(\hbar k_y)^2}{2m} + \hbar\omega_x(n_x + \frac{1}{2})$$

kjer je $\omega_x = \sqrt{\frac{a_x}{m}}$.

## 2.2 $a_x = a_y$

Če sta konstanti $a_x = a_y = a$ lahko napišemo lastne energije kot

$$E = \hbar\omega(1 + n_x + n_y)$$

kjer je $\omega = \sqrt{\frac{a}{m}}$ in $n_{x,y} = 0, 1, \ldots$. Vidimo, da so stanja degenerirana in ugotovimo, da je n-to stanje n+1 krat degenerirano.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Energija* | *Degeneracija* | $n_x$ | $n_y$ |
| $2\hbar\omega$ | 2 | 1 | 0 |
| | | 0 | 1 |
| $3\hbar\omega$ | 3 | 2 | 0 |
| | | 0 | 2 |
| | | 1 | 1 |

# 3 Lastna stanja operatorja vrtilne količine

Operator vrtilne količine v z smeri se glasi

$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

in če napišemo še hamiltonian za 2D harmonski oscilator v polarnih koordinatah:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial^2\varphi}] + \frac{1}{2}ar^2$$

vidimo, da nikjer ne nastopa $\varphi$ eksplicitno, kar pomeni,da je komutator med hamiltonianom in vrtilno enak nič: $[H, L_z] = 0$. Lastna stanja vrtilne količine dobimo na sledeč način:

$$L_z|\Psi\rangle = \alpha|\Psi\rangle$$

$$-i\hbar\frac{\partial\ |\Psi\rangle}{\partial\varphi} = \alpha|\Psi\rangle$$

$$\frac{d\Psi}{\Psi} = -\frac{\alpha}{i\hbar}$$

$$\Psi = \Psi_0 e^{\frac{i\alpha\varphi}{\hbar}}$$

Upoštevajoč robni pogoj $\Psi(\varphi + 2\pi) = \Psi(\varphi)$, dobimo za vrednosti $\alpha = m\hbar$. Izvedimo še normalizacijo:

$$\int_0^{2\pi} 1 d\varphi \Psi_0 \Psi_0^* = 1 \Rightarrow \Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Tako je lastna funkcija vrtilne količine enaka

$$|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}$$

Ker hamiltonian in vrtilna količina komutirata so $n = n_1 + n_2$ in m dobra kvantna števila in lahko iz njih sestavimo bazo.

# 4 Prehod na novo bazo - poseben primer

Želimo bazne vektorje nove baze $|nm\rangle$ zapisati z baznimi vektorji stare baze $n_1n_2$. Poglejmo si prvi dve stanji harmonskega oscilatorja:

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi x_0^2}} e^{-\frac{x^2}{x_0^2}}$$

$$\Psi_1 = \frac{\sqrt{2}x}{x_0}\langle x|0\rangle$$

Poglejmo si stanja $|10\rangle, |01\rangle$ v stari bazi v polarnem zapisu

$$\langle r\varphi|01\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x_0^2} r sin\varphi e^{-\frac{r^2}{2x_0^2}}$$

$$\langle r\varphi|10\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x_0^2} r cos\varphi e^{-\frac{r^2}{2x_0^2}}$$

Hitro opazimo,da lahko valovni funkciji sestavimo tako, da dobimo ravno člen $e^{im\varphi} = cos(\varphi) \pm isin(\varphi)$, kjer je $m = \pm 1$.

$$|1, \pm 1\rangle_{nm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle_{n_1n_2} \pm i|0, 1\rangle_{n_1n_2})$$

.

# 5 Prehod na novo bazo - splošno

Valovno funkcijo napišemo kot poljubno linearno kombinacijo v stari bazi:

$$\Psi = a|01\rangle + b|10\rangle$$

in upoštevamo, da za lastna stanja vrtilne količine velja

$$L_z\Psi = \hbar m\Psi$$

Če upoštevamo te dve enačbi dobimo

$$aL_z|01\rangle + bL_z|10\rangle = am\hbar|01\rangle + bm\hbar|10\rangle$$

Če sedaj enačbi posamezno množimo s $\langle 10|$ in $\langle 01|$ in enačbe zapišemo v matrični obliki dobimo

$$\begin{pmatrix} \langle 10|L_z|10\rangle & \langle 10|L_z|01\rangle \\ \langle 01|L_z|10\rangle & \langle 01|L_z|01\rangle \end{pmatrix}$$

Vidimo torej, da ima ta matrika lastni vrednosti, ki sta ravno lastni vrednosti operatorja vrtilne količine, in lastna vektorja, ki sta ravno koeficienta razvoja valovne funkcije po novi bazi. Lastni vrednosti matrike nam bosta torej definirali nova bazna vektorja, pripadajoča lastna vektorja pa bosta koeficienta razvoja teh novih baznih vektorjev po stari bazi. V našem primeru torej dobimo:

$$\langle 0,1|L_z|0,1\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{2}{\pi}\frac{1}{x_0^2} r^2 \sin\phi(-i\hbar)\cos\phi e^{-\frac{r^2}{x_0^2}} r dr d\phi = 0.$$

Integral je nič, ker je kotni del očitno nič. Podoben integral, ki se ravno tako zaradi kotnega dela izniči imamo tudi pri:

$$\langle 1,0|L_z|1,0\rangle = 0.$$

Preostaneta še:

$$\langle 1,0|L_z|0,1\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{2}{\pi}\frac{1}{x_0^4} r^2 \sin\phi(-i\hbar)(-\sin\phi) e^{-\frac{r^2}{x_0^2}} r dr d\phi = i\hbar\frac{2}{\pi}\int \frac{r^2}{x_0^4} e^{-\frac{r^2}{x_0^2}} r dr \int_0^{2\pi} sin^2(\phi) d\phi = i\hbar$$

$$\langle 1,0|L_z|0,1\rangle = -i\hbar$$

Izračunali smo vse elemente matrike, katere lastne vrednosti in vektorje iščemo.

$$\begin{pmatrix} 0 & i\hbar \\ -i\hbar & 0 \end{pmatrix}$$

Lastni vrednosti sta:

$$\lambda^2 - \hbar^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\hbar$$

Uganemo lastna vektorja in ju normaliziramo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

, ki mu pripada lastna vrednost $\hbar$ in

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

, ki mu pripada lastna vrednost $-\hbar$ Dobili smo:

$$|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle + i|0,1\rangle)$$

$$|1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle - i|0,1\rangle)$$