Magnoni v antifermomagnetu

Simon Jesenko
(Dated: 23.5.2008)

I. NALOGA

Izpelji disperzijsko zvezo za magnone v 1D antiferomagnetnem kristalu.

II. REŠITEV

Rešitev poiščemo v klasičnem približku, kjer obravnavamo spine $\mathbf{S}$ kot vektorje. Interakcijsko energijo spinske verige v Heisenbergovem modelu zapišemo kot vsoto interakcij med najbližjimi sosedi,

$$H = J\sum_{\langle i,j\rangle}\mathbf{S}_i\mathbf{S}_j = J\sum_{i=1}^{N}\mathbf{S}_p\cdot\mathbf{S}_{p+1}, \tag{1}$$

ki je od izraza v feromagnetnem primeru različna za predznak. Iz gornjega izraza hitro razberemo, da bo osnovno stanje antiferomagnetne verige (najmanjši izraz za H) v primeru, če je vsak naslednji spin obrnjen v nasprotno smer,

$$\mathbf{S}_p\cdot\mathbf{S}_{p+1} = -S^2 \Rightarrow U_0 = -NS^2J, \quad S = |\mathbf{S}|$$

V hamiltonianu (1) p-ti spin nastopa kot

$$J\mathbf{S}_p\cdot(\mathbf{S}_{p-1} + \mathbf{S}_{p+1}).$$

Upoštevamo izraz za magnetni moment p-tega spina, $\boldsymbol{\mu}_p = -g\mu_b\mathbf{S}_p$, in prispevek k hamiltonianu lahko zapišemo kot

$$-\boldsymbol{\mu}_p\cdot\left(\frac{J}{g\mu_B}(\mathbf{S}_{p-1} + \mathbf{S}_{p+1})\right) = -\boldsymbol{\mu}_p\cdot\mathbf{B}_p$$

, kjer $\mathbf{B}_p$ označuje efektivno magnetno polje na položaju p-tega spina.

V klasični mehaniki je časovni odvod vrtilne količine enak navoru na delec. Za spine se vrtilna količina zapiše kot $\hbar\mathbf{S}_p$, navor pa je enak $\boldsymbol{\mu}_p\times\mathbf{B}_p$. Tako lahko zapišemo

$$\frac{d\mathbf{S}_i}{dt} = \frac{1}{\hbar}\boldsymbol{\mu}_p\times\mathbf{B}_p = -\frac{J}{\hbar}\left(\mathbf{S}_p\times\mathbf{S}_{p-1} + \mathbf{S}_p\times\mathbf{S}_{p+1}\right),$$

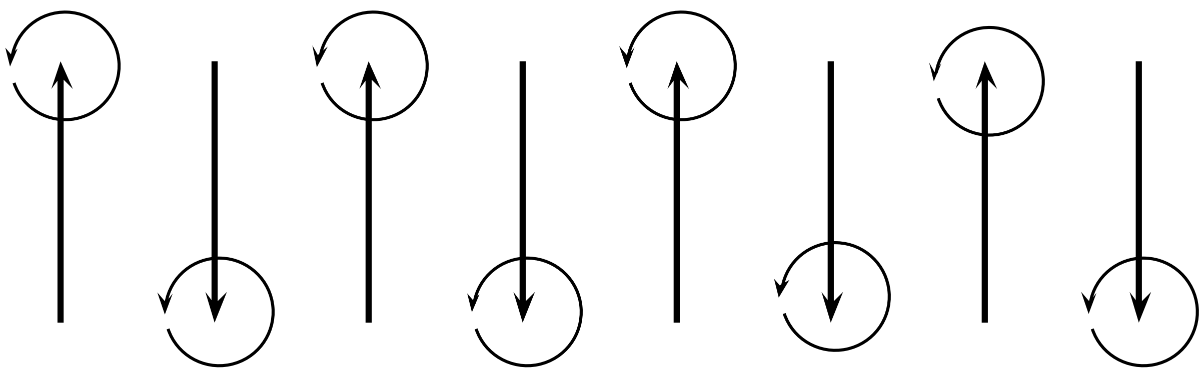

FIG. 1: Odsek 1D antiferomagnetne verige v osnovnem stanju.

oziroma v komponentni obliki kot

$$
\begin{aligned}
\frac{dS_p^x}{dt} &= -\frac{J}{\hbar}\left[S_p^y(S_{p-1}^z + S_{p+1}^z) - S_p^z(S_{p-1}^y + S_{p+1}^y)\right] \\
\frac{dS_p^y}{dt} &= -\frac{J}{\hbar}\left[S_p^z(S_{p-1}^x + S_{p+1}^x) - S_p^x(S_{p-1}^z + S_{p+1}^z)\right] \\
\frac{dS_p^z}{dt} &= -\frac{J}{\hbar}\left[S_p^x(S_{p-1}^y + S_{p+1}^y) - S_p^y(S_{p-1}^x + S_{p+1}^x)\right]
\end{aligned}
$$

Sedaj upoštevamo, da spini nihajo okrog ravnovesne lege $\mathbf{S}_p = \pm(0, 0, S_p^z)$, in da so amplitude nihanja majhne, $S_p^x,\ S_p^y \ll S$. V zgornjih enačbah tako lahko zanemarimo vse kvadratne člene. Za z komponento tako dobimo enačbo

$$
\frac{dS_p^z}{dt} = 0
$$

Enačbi za x in y komponento zapišemo za dve ločeni domeni:

- domena A, ki vsebuje spine s sodimi indeksi $2p$ in $S^z = S$
- domena B, ki vsebuje spine z lihimi indeksi $2p + 1$ in $S^z = -S$

Za domeno A se enačbi glasita:

$$
\begin{aligned}
\frac{dS_{2p}^x}{dt} &= \frac{JS}{\hbar}\left(2S_{2p}^y + S_{2p-1}^y + S_{2p+1}^y\right) \\
\frac{dS_{2p}^y}{dt} &= -\frac{JS}{\hbar}\left(2S_{2p}^x + S_{2p-1}^x + S_{2p+1}^x\right)
\end{aligned}
$$

in za domeno B

$$
\begin{aligned}
\frac{dS_{2p+1}^x}{dt} &= -\frac{JS}{\hbar}\left(2S_{2p+1}^y + S_{2p}^y + S_{2p+2}^y\right) \\
\frac{dS_{2p+1}^y}{dt} &= \frac{JS}{\hbar}\left(2S_{2p+1}^x + S_{2p}^x + S_{2p+2}^x\right)
\end{aligned}
$$

Za lažje reševanje enačb uvedemo kompleksno spremenljivko $S^+ = S^x + iS^y$. Gornje štiri enačbe se tako reducirajo v

$$
\frac{dS_{2p}^+}{dt} = -\frac{iJS}{\hbar}\left(2S_{2p}^+ + S_{2p-1}^+ + S_{2p+1}^+\right) \tag{2}
$$

$$
\frac{dS_{i+1}^+}{dt} = \frac{iJS}{\hbar}\left(2S_{2p+1}^+ + S_{2p}^+ + S_{2p+2}^+\right) \tag{3}
$$

Rešitve poiščemo z nastavkom za ravne valove,

$$
\begin{aligned}
S_{2p}^+ &= A\exp(i2pka - i\omega t) \\
S_{2p+1}^+ &= B\exp(i(2p+1)ka - i\omega t)
\end{aligned}
$$

Nastavka vstavimo v enačbi (3) in (3), in preostane

$$
\begin{aligned}
A\omega &= \frac{1}{2}\omega_0(2A + Be^{-ika} + Be^{ika}) \\
-B\omega &= \frac{1}{2}\omega_0(2B + Ae^{-ika} + Ae^{ika})
\end{aligned}
$$

kjer smo označili $\omega_0 = 2JS/\hbar$. Zgornji sistem enačb ima netrivialne rešitve samo v primeru, če velja

$$
\begin{vmatrix} \omega_0 - \omega & \omega_0\cos ka \\ \omega_0\cos ka & \omega_0 + \omega \end{vmatrix} = 0
$$

kar nam določa disperzijsko zvezo

$$
\omega^2 = \omega_0^2(1 - \cos^2 ka) \Rightarrow \omega = \omega_0|\sin ka|.
$$