Fizika trdne snovi

Feromagnet v približku povprečnega polja

Nuša Pukšič

Naloga

Obravnavamo feromagnet v približku povprečnega polja. Zanimata nas magnetizacija $\mathcal{M}$ pri $T > 0$ K in magnetna susceptibilnost χ nad kritično temperaturo T_c.

Rešitev

Uvod

Splošen hamiltonjan

$$H = -J \sum_{<ij>} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j + g_o \mu_B \sum_i \vec{s}_i \cdot \vec{B}_o = \sum_i \vec{s}_i \cdot \left\{ \sum_{j=n.s.i} -J\vec{s}_j + g_o\mu_B \vec{B}_o \right\} = \\ = \sum_i g_o \mu_B \vec{s}_i \cdot \vec{B}_i^{ef}$$

opisuje spin v efektivnem polju ostalih spinov in zunajnega polja ($n.s.i$ pomeni najbližje sosede i-ja). V približku povprečnega polja operator spina nadomestimo s pričakovano vrednostjo:

$$\vec{B}_i^{ef} = \vec{B}_o - \frac{J}{g_o\mu_B} \sum_{j=n.s.i} \langle \vec{s}_j \rangle \, .$$

V primeru feromagneta ($J > 0$) v homogenem magnetnem polju $\vec{B}_o$ imamo na vseh mestih spin vzporeden z zunanjim poljem. Pričakovana vrednost je tedaj:

$$\langle \vec{s}_j \rangle = -\vec{s} \, , \tag{1}$$

in efektivno polje v primeru z najbližjih sosedov:

$$\vec{B}_i^{ef} = \vec{B}_o + \frac{Jz}{g_o\mu_B} \vec{s} \, . \tag{2}$$

Za magnetizacijo $\mathcal{M}$ velja:

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{N}{V} \, g_o \mu_B \vec{s} \, , \tag{3}$$

magnetizacijo N ionov s spinom j pa opišemo z Brillouinovimi funkcijami B_j (magnetizacija ima smer efektivnega polja):

$$\mathcal{M} = \frac{N}{V} \, g_o \mu_B j \, B_j \left(\beta g_o \mu_B j B_i^{ef} \right) \, ,$$

kjer so Brillouinove funkcije definirane kot:

$$B_j(x) = \frac{2j+1}{2j} \coth\left(\frac{2j+1}{2j}\, x\right) - \frac{1}{2j} \coth\left(\frac{1}{2j}\, x\right) .$$

Primer, ko ni zunajega polja

V primeru, ko ni zunanjega polja ($B_o = 0$) je efektivno polje

$$B^{ef} = \frac{Jzs}{g_o \mu_B} .$$

Razvijemo coth (najprej do drugega reda) po obrazcu:

$$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \cdots$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \frac{N}{V} g_o \mu_B j\, B_j\left(\beta g_o \mu_B j B^{ef}\right) = \alpha\, j\, B_j(\beta j Jzs) = \\
&= \alpha j \left(\frac{2j+1}{2j} \coth\left(\frac{2j+1}{2j} \beta j Jzs\right) - \frac{1}{2j} \coth\left(\frac{1}{2j} \beta j Jzs\right)\right) = \\
&= \alpha \left(\frac{2j+1}{2} \frac{2}{(2j+1)\beta Jzs} - \frac{1}{2} \frac{2}{\beta Jzs} + \frac{2j+1}{6} \frac{(2j+1)\beta Jzs}{2} - \frac{1}{6} \frac{\beta Jzs}{2}\right) = \\
&= \alpha \frac{j(j+1)}{3}\, \beta Jzs \,, && (4) \\
\mathcal{M} &= \frac{j(j+1)}{3}\, \beta Jz\mathcal{M} \,. && (5)
\end{aligned}$$

Iz enačbe (5) razberemo trivialno rešitev za magnetizacijo $\mathcal{M} = 0$ in izrazimo kritično temperaturo:

$$T_c = \frac{j(j+1)}{3} \frac{Jz}{k_B} .$$

Netrivialno rešitev za magnetizacijo dobimo z razvojem coth do naslednjega reda:

$$\mathcal{M} = \frac{(2j+1)^2 - 1}{12}\, \beta Jz\mathcal{M} - \frac{(2j+1)^4 - 1}{720\, \alpha^2}\, (\beta Jz\mathcal{M})^3 \tag{6}$$

$$\mathcal{M}^2 = \alpha^2 \frac{5}{12} \frac{((2j+1)^2 - 1)^2}{(2j+1)^2 + 1} \left(\frac{\beta}{\beta_c} - 1\right) \left(\frac{\beta_c}{\beta}\right)^3 \tag{7}$$

$$\mathcal{M} = \sqrt{\frac{5}{12} \frac{N}{V}}\, g_o \mu_B \frac{4j(j+1)}{\sqrt{(2j+1)^2 + 1}} \sqrt{\frac{T^2\,(T_c - T)}{T_c^3}} \tag{8}$$

V bližini kritične temperature:

$$\mathcal{M} = \sqrt{\frac{5}{12}}\frac{N}{V}g_o\mu_B\frac{4j(j+1)}{\sqrt{(2j+1)^2+1}}\sqrt{\frac{((T-T_c)+T_c)^2}{T_c^3}(T_c-T)} =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{12}}\frac{N}{V}g_o\mu_B\frac{4j(j+1)}{\sqrt{(2j+1)^2+1}}\sqrt{\frac{(T_c-T)^2-T_c(T_c-T)+T_c^2}{T_c^3}(T_c-T)} \quad (9)$$

V najnižjem redu dobimo odvisnost:

$$\mathcal{M} = \frac{N}{V}g_o\mu_B\sqrt{\frac{5}{12}}\frac{4j(j+1)}{\sqrt{(2j+1)^2+1}}\sqrt{\frac{T_c-T}{T_c}} \quad (10)$$

Primer z zunanjim poljem

V primeru zunanjega polja B_o spet uporabimo razvoj coth do drugega reda:

$$\mathcal{M} = \alpha\frac{(2j+1)^2-1}{12}\beta g_o\mu_B B_o + \frac{\beta}{\beta_c}\mathcal{M}$$

$$\mathcal{M} = \frac{N}{V}\,\frac{j(j+1)}{3}\,\frac{(g_o\mu_B)^2}{k_B(T-T_c)}\,B_o\,. \quad (11)$$

Magnetna susceptibilnost pa je enaka:

$$\chi = \mu_o\frac{\mathcal{M}}{B_o} = \frac{N}{V}\,\frac{j(j+1)}{3}\,\frac{(g_o\mu_B)^2\mu_o}{k_B(T-T_c)} = \frac{C}{T-T_c} = \mathrm{Curie-Weiss}\,. \quad (12)$$

Primer z $j = 1/2$

$$\mathcal{M} = \frac{N}{2V}\,g_o\mu_B\,\tanh\left(\frac{\beta g_o\mu_B}{2}\left(B_o+\frac{Jzs}{g_o\mu_B}\right)\right) \quad (13)$$

$$T_c = \frac{Jz}{4k_B} \quad (14)$$

Spontana magnetizacija:

$$\mathcal{M} = \sqrt{\frac{3}{4}}\frac{N}{V}g_o\mu_B\sqrt{\frac{T^2(T_c-T)}{T_c^3}} \quad (15)$$

Zunanje polje B_o:

$$\mathcal{M} = \frac{N\mu_B^2 B_o}{Vk_B(T-T_c)}\,, \quad (16)$$

$$\chi = \frac{N\mu_B^2\mu_o}{Vk_B(T-T_c)}. \quad (17)$$