

Vpliv fononov na sevanje linearne verige sevalcev

Rok Prislan

6. junij 2008

1 Navodilo

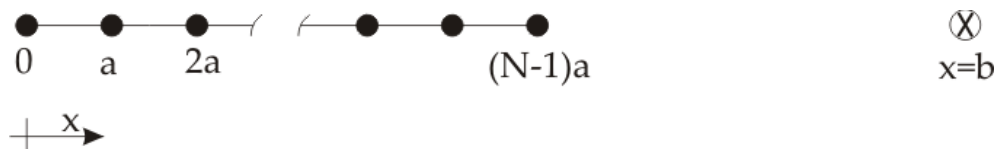
Imamo verigo N enakomerno razmaknjenih sevalcev lociranih v točkah $x_n = na$, kjer je a razdalja med sosedoma. Vsi sevajo koherentno z valovno dolžino ω , valovnim vektorjem k in amplitudo E_0 . Na osi verige je daleč stran postavljen detektor, ki meri intenziteto sevanja I . Predpostavimo, da je N velik, detektor pa daleč. Da bo stvar zanimiva, uvedemo časovno-odvisno modulacijo pozicije posameznega sevalca vzdolž vzmeti

$$u(t) = u_0 \cos(qan - \Omega t).$$

Pri kateri frekvenci in k bo izmerjeno veliko sevanja?

2 Rešitev

Pozicijo sevalcev in detektorja na verigi prikazuje spodnja slika.



Polje v v točki b ob času t lahko zapišemo kot

$$E(b, t) = \sum_{n=0}^{N-1} E_0 \cos(k(b - x_n) - \omega t), \quad (1)$$

kjer pozicijo n -tega sevalca zapišemo kot

$$x_n = na + u_0 \cos(\Omega t - qna). \quad (2)$$

Kosinusni člen v enačbi 1 lahko zapišemo z eksponentno funkcijo a moramo nato opazovati le realni del polja

$$E(b, t) = \text{Re} \sum_{n=0}^{N-1} E_0 e^{i(k(b-na) + u_0 \cos(\Omega t - qna)) - \omega t}.$$

Če upoštevamo, da so odmiki od ravnovesnih leg (3) za posamezne sevalce majhni, lahko ta del eksponenta v zgornji enačbi razvijemo do prvega popravka in dobimo

$$E(b, t) = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} E_0 e^{i(k(b-na)-\omega t)} (1 - iku_0 \cos(\Omega t - qna)).$$

Tudi popravek lahko zapišemo v obliki eksponentne funkcije

$$\begin{aligned} E(b, t) &= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} E_0 e^{i(k(b-na)-\omega t)} - iku_0 \frac{E_0}{2} (e^{i(k(b-na)-qna-\omega t+\Omega t)} - e^{i(k(b-na)+qna-\omega t-\Omega t)}) = \\ &= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} E_0 e^{i(kb-\omega t)} e^{-ikna} - iku_0 \frac{E_0}{2} e^{i(kb-(\omega t-\Omega)t)} e^{-i(k+g)na} - \\ &\quad - iku_0 \frac{E_0}{2} e^{i(kb-(\omega t+\Omega)t)} e^{-i(k-g)na} \end{aligned}$$

Za vsoto lahko uporabimo formulo

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-ikna} = \frac{1 - e^{-ikNa}}{1 - e^{-ika}} = e^{-ik \frac{(N+1)}{2} a} \frac{\sin\left(\frac{kNa}{2}\right)}{\sin\left(\frac{ka}{2}\right)}. \quad (3)$$

Nas zanima, kdaj bodo intenzitete velike. To se zgodi, ko je sinus v imenovalcu enačbe 3 nič, za kar obstaja več možnosti.

Prva možnost je, da pri izmerjeni frekvenci ω velja $ka/2 = p\pi$, kjer je p celo število. Tako dobimo

$$E(b, t) = \operatorname{Re} \left[E_0 e^{i(kb-\omega t)} e^{ik \frac{N+1}{2} a} N \right].$$

Intenziteta, ki je sorazmerna kvadratu amplitude polja, je

$$\bar{I}(t) \propto \frac{1}{2} E_0^2 N^2.$$

Po tem sprašuje tudi naloga.

Druga možnost je, če je $\frac{(k\pm q)a}{2} = p\pi$, ko prevladuje frekvenca $\omega \pm \Omega$ in dobimo končni rezultat za intenziteto

$$\bar{I}(t) \propto \frac{1}{2} E_0^2 \left(\frac{ku_0}{2} \right)^2 N^2.$$