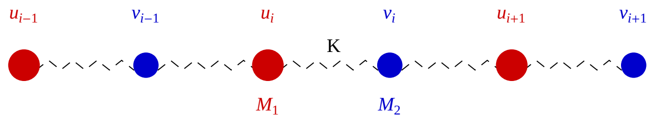
FIZIKA TRDNE SNOVI
2007/08
2. vaja: Mrežna nihanja dvoatomske verige v dolgovalovni (kontinumski) limiti

Jure Klučar

26. maj 2008

1 Naloga

Obravnavaj nihanje dvoatomske verige v dolgovalovni (kontinumski) limiti. Atoma z masama M_1 in M_2 se v verigi izmenjujeta (Slika1). Predpostavi, da so atomi vezani med seboj z vzmetmi s konstantami K na razdalji $\frac{a}{2}$.



Slika 1: **Dvoatomska veriga**: atomi so med seboj sklopljeni z enakimi vzmetmi, njihove mase alternirajo, atomi so na razdaji $a/2$

2 Zapis potencialne in kinetične energije

Označimo verigo kot prikazano (Slika1), kjer u_i in v_i označujejo odmike posameznih atomov od njihovih ravnosvesnih leg.
Zapišemo kinetično energijo kot vsoto

$$T = \frac{1}{2}M_1 \sum_i \dot{u}_i + \frac{1}{2}M_2 \sum_i \dot{v}_i, \tag{1}$$

in potencialno energijo

$$V = \frac{1}{2}K \sum_i \Big[(v_i - u_i)^2 + (u_{i+1} - v_i)^2\Big]. \tag{2}$$

Po Euler-Lagrangeovih enačbah dobimo sistem dveh enačb za u_i in v_i

$$M_1 \ddot{u}_i = K(v_i + v_{i-1} - 2u_i)$$
$$M_2 \ddot{v}_i = K(u_i + u_{i+1} - 2v_i). \tag{3}$$

Če bi želeli splošno rešitev gibanja posameznih atomov, bi reševali zgronji (3) sistem enačb.

3 Kontinumska limita

Enačbi (3) najprej seštejemo

$$M_1\ddot{u}_i + M_2\ddot{v}_i = K(v_{i-1} + v_i + u_{i+1} - u_i) \tag{4}$$

in u_i ter v_i zapišemo drugače

$$\begin{aligned} u_i(t) &= u(ia,t) = u(x,t) \\ v_i(t) &= v(ia,t) = u(ia+\frac{a}{2},t) = u(x+\frac{a}{2},t), \end{aligned} \tag{5}$$

kjer smo rekli da je x v točki ia in povezali med seboj v_i ter u_i.
To (5) vstavimo v (4) in dobimo

$$M_1\ddot{u}(x,t) + M_2\ddot{u}(x+\frac{a}{2},t) = K\Big[u(x-\frac{a}{2},t) - u(x+\frac{a}{2},t) + u(x+a,t) - u(x,t)\Big] \tag{6}$$

Do sem je še vse splošno. Sedaj pride na vrsto konitnumska lmita. Predpostavimo, da je razdalja med atomi a precej majhna. To pomeni, da se na tej razdalji funkcija $u(x,t)$ ne spremeni drastično (dolgovalovna limita). Zato jo lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto okrog x

$$\begin{aligned} u(x-\frac{a}{2}) &= u(x) - \frac{a}{2}u'(x) + \frac{a^2}{8}u''(x) \\ u(x+\frac{a}{2}) &= u(x) + \frac{a}{2}u'(x) + \frac{a^2}{8}u''(x) \\ u(x+a) &= u(x) + au'(x) + \frac{a^2}{2}u''(x), \end{aligned} \tag{7}$$

kjer smo razvili do kvadratičnega člena.
Vse skupaj (7) vstavimo v (6) in še pred tem predpostavimo

$$\ddot{u}(x,t) = \ddot{u}(x+\frac{a}{2},t),$$

in dobimo enačbo

$$(M_1 + M_2)\ddot{u} = K\frac{a^2}{2}u''. \tag{8}$$

Če še zapišemo

$$\rho = \frac{M_1+M_2}{a}$$

$$E = \frac{Ka}{2}$$

dobimo

$$\rho\ddot{u} = Eu'', \tag{9}$$

kar je ravno enačba za propagacijo zvoka v etru s hitrostjo $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.