

# Masni defekt ali nečistoča v linearni verigi.

Primož Burger

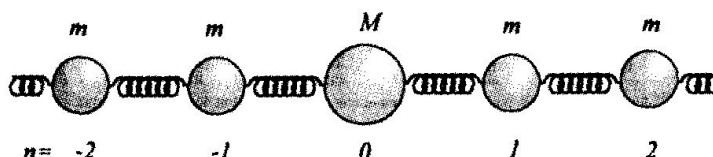
12. 3. 2008

## 1 Naloga

Izračunaj lastno frekvenco linearne verige z masnim defektom (izotop) na mestu  $n=0$ , privzemi nastavek

$$s_n = s_0 e^{-k(\omega)|n|a - i\omega t}$$

konstanta vzmeti je  $\kappa$ ,  $a$  pa je razdalja med atomi.



Slika 1: Linearna veriga sklopljenih atomov z nečistočo na mestu  $n$ .

## 2 Rešitev

Če je premik  $n$ . atoma  $s_n$ , sta enačbi gibanja za masi  $n=-1$  in  $n=0$ :

$$m\ddot{s}_{-1} = \kappa(s_{-2} - 2s_{-1} + s_0)$$

$$M\ddot{s}_0 = \kappa(s_{-1} - 2s_0 + s_1)$$

ali bolj splošno

$$m\ddot{s}_n = \kappa(s_{n-1} - 2s_n + s_{n+1}) \quad \text{za } n \neq 0$$

Ko v gornji enačbi damo naš nastavek

$$s_n = s_0 e^{-kan - i\omega t} \quad \text{za } n > 0$$

$$s_n = s_0 e^{-i\omega t} \quad \text{za } n = 0$$

$$s_n = s_0 e^{+kan - i\omega t} \quad \text{za } n < 0$$

dobimo dve enačbi

$$m\omega^2 = \kappa(2 - e^{ka} - e^{-ka})$$

$$M\omega^2 = 2\kappa(1 - e^{-ka})$$

katerih rešitev je:

$$\omega = 2\sqrt{\frac{\kappa}{m}} \sqrt{\frac{m/M}{2 - M/m}}$$

in

$$ka = \ln\left(1 - \frac{2m}{M}\right)$$

### 3 Diskusija

1. Za  $M > 2m$  je  $\omega$  imaginarna in  $k$  negativen in realen. To pomeni, da naš nastavek ne deluje. Rešitev s časom pada in z naraščajočim  $n$  divergira.

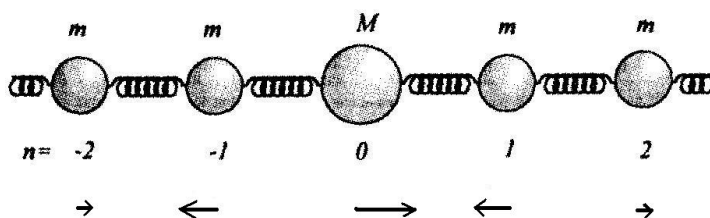
2. Za  $M < 2m$  je  $\omega$  realna  $k$  pa je kompleksen. To je oscilirajoča rešitev. Z uporabo zveze  $\ln(-A) = i\pi + \ln A$  kjer je  $A > 0$  dobimo:

$$ka = i\pi + \ln\left(\frac{2m}{M} - 1\right)$$

a) Za  $m < M < 2m$  je  $\text{Re}(k)$  negativen in rešitev  $s_n$  divergira za velike  $n$ . Naš nastavek ni dober.

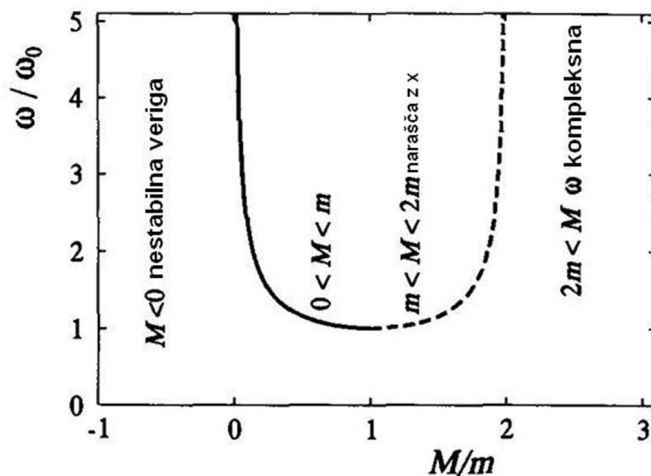
b) Za  $M < m$  je  $\text{Re}(k)$  pozitiven. V tem primeru je naš nastavek uporaben. Rešitev opisuje nihajoče delece. Amplituda nihanja pada z naraščajočim  $n$ .

$$s_n = s_0 e^{-k(\omega)|n|a - i\omega t} = s_0 (-1)^n \left(\frac{2m}{M} - 1\right)^{-|n|} e^{-i\omega t}$$



Slika 2: Smeri odmikov alternirajo, amplituda pada z razdaljo od  $n=0$

Za zaključek lahko rečemo, da je naš nastavek uporaben le za  $0 < M < m$ . (Za negativne mase  $M$  bi bila veriga nestabilna.) Časovna odvisnost rešitve je nihanje. Amplituda z razdaljo od defekta pada. Opazimo lahko, da je frekvenca nihanja  $\omega \geq 2\sqrt{\frac{\kappa}{m}}$ , medtem ko je za verigo brez nečistoče ( $M=m$ )  $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{\kappa}{m}}$ . Frekvenca nihanja verige z nečistočo je nad najvišjo frkvenco fononov čiste verige. To je razumljivo, saj manjša masa pomeni večjo fekvenco nihanja. Ta rezultat prikazuje slika 3.



Slika 3: Frekvenca kot funkcija mase izotopa. Nihajoča rešitev je nedivergentna le za  $0 < M < m$ .