Londonova enačba za superprevodno plast

(2. naloga v Ashcroftu na str. 754)

Jaka Petelin

Maj, 2008

Imamo neskončno superprevodno plast, omejeno v smeri osi y pri $y = \pm d$, v zunanjem magnetnem polju $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{e}}_z$. Izračunali bomo magnetno polje in gostoto električnega toka v plasti ter susceptibilnost plasti v limitah tanke in debele plasti.

V superprevodnikih lahko zapišemo zvezo med gostoto toka in magnetnim poljem (izpeljava: Ashcroft[1] str. 737-738):

$$\nabla \times \mathbf{j} = -\frac{n_s e_0^2}{m} \mathbf{B} \tag{1}$$

pri čemer je n_s gostota superprevodnih elektronov. Poleg tega velja še Maxwellova enačba:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \tag{2}$$

Če na enačbi 1 in 2 delujemo z rotorjem in upoštevamo:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{v} &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{j} &= 0 \quad \text{(sledi iz enačbe 2)} \end{aligned}$$

potem dobimo:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{B} &= \mu_0 \frac{n_s e_0^2}{m} \mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}}{\Lambda^2} \\ \nabla^2 \mathbf{j} &= \frac{\mathbf{j}}{\Lambda^2} \end{aligned}$$

V našem primeru imamo $\mathbf{B} = B_z(y)\, \hat{\mathbf{e}}_z$, zato se zgornja enačba zapiše:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_z(y)}{\partial y^2} &= \frac{B_z(y)}{\Lambda^2} \\ B_z(y) &= C \sinh \frac{y}{\Lambda} + D \cosh \frac{y}{\Lambda} \end{aligned}$$

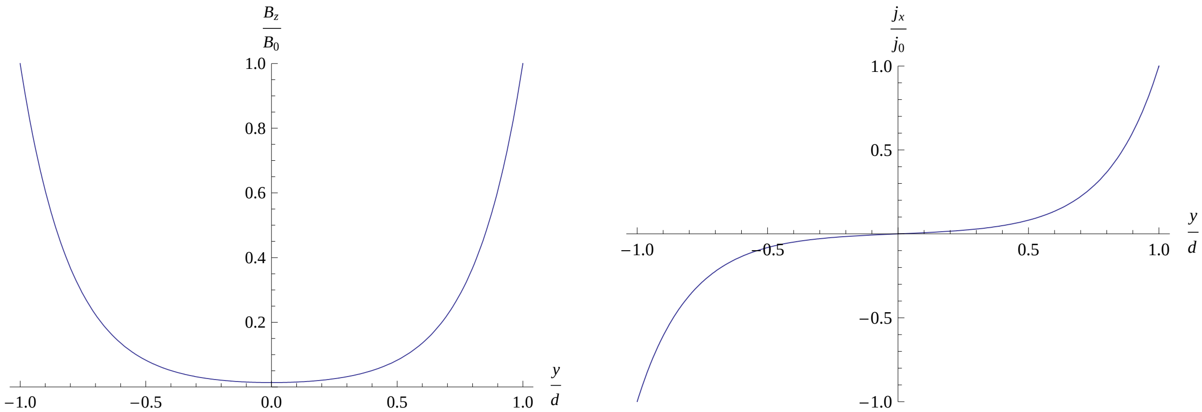
Upoštevamo še robni pogoj: magnetno polje mora biti na površini plasti zvezno. Torej:

$$B_z(d) = B_z(-d) = B_0$$

Od tod dobimo koeficienta C in D. Tako lahko zapišemo:

$$B_z(y) = B_0 \frac{\cosh \frac{y}{\Lambda}}{\cosh \frac{d}{\Lambda}}$$

[1] Ashcroft uporablja Maxwellove enačbe v CGS enotah, mi pa računamo v SI enotah. Posledično se rezultati ne ujemajo povsem z Ashcroftom.



Slika 1: Magnetno polje (levo) in električni tok (desno) v plasti superprevodnika, za $d = 5\Lambda$.

Iz enačbe 2 vidimo:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow j_x(y) &= \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_z(y)}{\partial y} \\ &= \frac{B_0}{\mu_0 \Lambda} \frac{\sinh \frac{y}{\Lambda}}{\cosh \frac{d}{\Lambda}} \end{aligned}$$

Magnetizacija se, kot vemo zapiše:

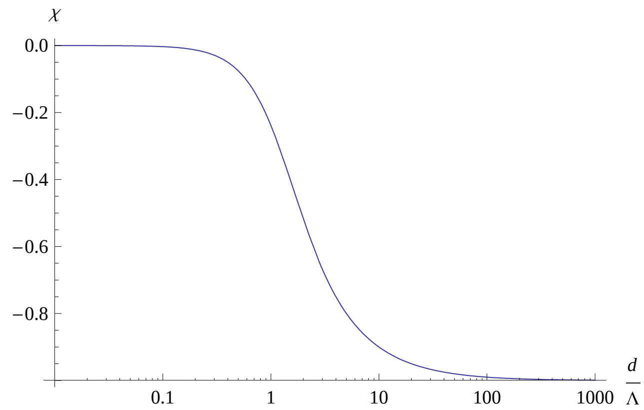
$$\mathbf{M}(y) = \frac{1}{\mu_0} \left(\mathbf{B}(y) - \mathbf{B}_0 \right)$$

Za računanje susceptibilnosti bomo potrebovali povprečno magnetizacijo:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{M}} &= \frac{1}{2d} \int_{-d}^{d} \mathbf{M}(y) \, dy \\ &= \frac{1}{2\mu_0 d} \int_{-d}^{d} \left(\mathbf{B}(y) - \mathbf{B}_0 \right) dy \\ &= \frac{\mathbf{B}_0}{2\mu_0 d} \left(\frac{2\Lambda \sinh \frac{d}{\Lambda}}{\cosh \frac{d}{\Lambda}} - 2d \right) \\ &= -\frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} \left(1 - \frac{\Lambda}{d} \tanh \frac{d}{\Lambda} \right) \end{aligned}$$

Za susceptibilnost torej dobimo:

$$\chi = \frac{\mu_0 \left| \overline{\mathbf{M}} \right|}{B_0} = -\left(1 - \frac{\Lambda}{d} \tanh \frac{d}{\Lambda} \right)$$



Slika 2: Susceptibilnost superprevodne plasti v odvisnosti od debeline plasti.

Za tanke plasti ($d \ll \Lambda$) dobimo:

$$\begin{aligned} \chi &\approx -\left(1 - \frac{\Lambda}{d}\left(\frac{d}{\Lambda} - \frac{d^3}{3\Lambda^3}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{d}{\Lambda}\right)^2 \end{aligned}$$

Za debele plasti ($d \gg \Lambda$) pa dobimo:

$$\chi \approx -\left(1 - \frac{\Lambda}{d}\right) \to -1$$