DISPERZIJSKA RELACIJA ZA POLARITONE

ALBERT HORVAT

Iščemo disperzijsko relacijo $\omega = \omega(k)$ za izolatorje, točneje za dvoatomni ionski kristal. Zvezo $\epsilon = \epsilon(\omega)$ najdemo v [1, eq. 27.57].

$$\epsilon = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_\infty - \epsilon_0}{\frac{\omega^2}{\omega_T^2} - 1} \tag{1}$$

$$\omega_T^2 = \overline{\omega}^2 \frac{\epsilon_\infty - \epsilon_0}{\epsilon_0 + 2} \tag{2}$$

ϵ_∞ je dielektičnost pri zelo visokih (optičnih) frekvencah, ϵ_0 pri zelo nizkih. $\overline{\omega}^2 = k/M$, kjer je M reducirana masa pozitivnega in negativnega iona v primitivni celici, k pa koeficient vzmeti.

Kako je dielektričnost ϵ povezana z valovnim vektorjem k, izvemo iz Maxwellovih enačb, kjer smo se v našem primeru omejili na izolatorje.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \tag{3}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon(\omega)\epsilon_0 \mathbf{E}_0 \tag{4}$$

Iz teh enačb izpeljemo valovno enačbo

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} \tag{5}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \tag{6}$$

Imamo torej

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \tag{7}$$

Enačbo (7) rešujemo z nastavkoma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(\imath(\mathbf{kr} - \omega t)) \qquad \mathbf{D} = \mathbf{D}_0 \exp(\imath(\mathbf{kr} - \omega t))$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E} \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{D}$$

Ko te nastavke vstavimo v valovno enačbo, dobimo

$$-k^2 \mathbf{E}_0 = \mu_0(-\omega^2)\mathbf{D}_0 \qquad \text{vstavim (4)} \tag{8}$$

$$-k^2 = -\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \epsilon(\omega) \tag{9}$$

$$k^2 c^2 = \omega^2 \epsilon(\omega) \tag{10}$$

$$\epsilon(\omega) = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \tag{11}$$

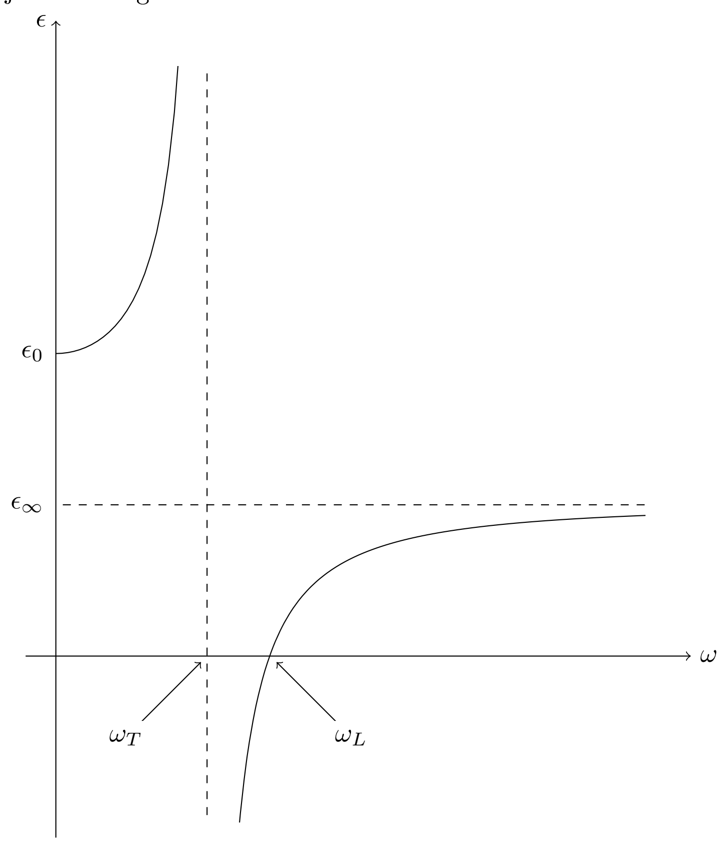
Sedaj lahko narišemo zvezo (1) s pomočjo limit

$$\lim_{\omega\to\infty} \epsilon(\omega) = \epsilon_\infty \tag{12}$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \epsilon(\omega) = \epsilon_0 \tag{13}$$

$$\tag{14}$$

Iz $\epsilon(\omega) = 0$ dobimo $\omega_L^2 = \omega_T^2 \epsilon_0/\epsilon_\infty$. Očitno je pri ω_T pol. Na intervalu (ω_T, ω_L) je $\epsilon < 0$, zato je k^2c^2 imaginaren.



S pomočjo tega grafa lahko narišemo $k = k(\omega)$ in si ogledamo limiti $\omega \to \infty, \omega \to 0$. To počnemo zato, ker ne vemo lepo obrniti enačbe $k = k(\omega)$. Imamo torej

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_\infty + \frac{\epsilon_\infty - \epsilon_0}{\frac{\omega^2}{\omega_T^2} - 1}}. \tag{15}$$

Oglejmo si, kaj se dogaja pri nizkih frekvencah,

$$\lim_{\omega\to 0} k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_0}, \tag{16}$$

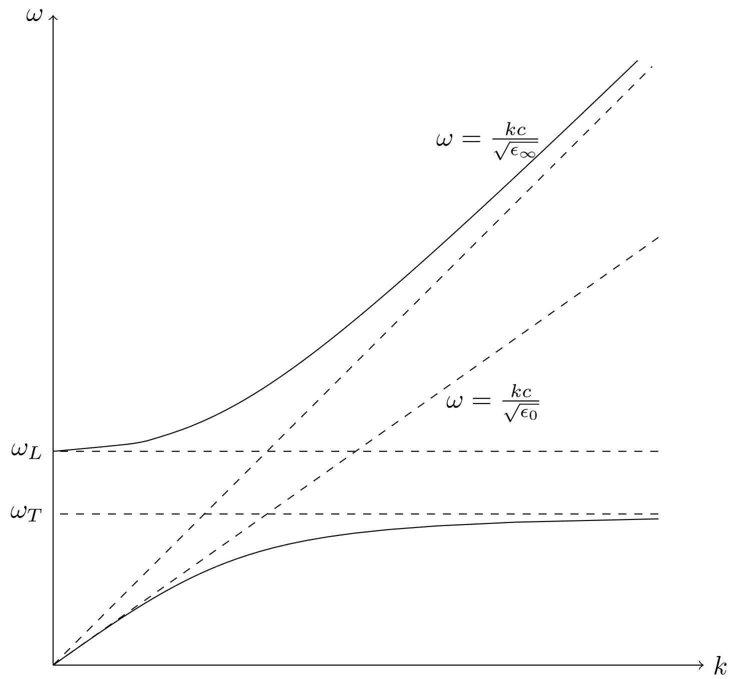
in pri visokih frekvencah

$$\lim_{\omega\to\infty} k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_\infty}. \tag{17}$$

Iz k velik sledi, da je ϵ velik, takrat pa je $\omega \to \omega_T$. To vidimo iz prejšnjega grafa in iz enačbe (11).

Nazadnje še pogledamo, kako je za majhne k in $\omega \neq 0$. Ugotovimo da je ϵ majhen, iz prejšnjega grafa pa se vidi $\omega \approx \omega_L$.

S pomočjo teh limit lahko približno narišemo disperzijsko zvezo za polaritone. Dobimo dve veji: optično in akustično.



;

Literatura

[1] N. W. Aschcroft, N.D. Mermin: *Solid State Physics*, Holt-Saunders 1976.