FIZIKA TRDNE SNOVI 2007/08

Nabit delev v homogenem magnetnem polju

Blaž Mikuž

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

27. februar 2008

1 Naloga

Poišči lastne funkcije in lastne vrednosti energije za nabit delec v homogenem, konstantnem magnetnem polju v smeri osi z.

2 Rešitev

Hamiltonjan za delec z nabojem e in maso M v magnetnem polju zapišemo kot

$$H = \frac{1}{2M}(\vec{p} - e\vec{A})^2$$

kjer je $\vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ operator gibalne količine in $\vec{A}$ magnetni potencial. Če hočemo poiskati lastne funkcije in lastne vrednosti energije moramo rešit enačbo $H\Psi = E\Psi$. Razpišimo najprej izraz za $H\Psi$:

$$\begin{aligned}
H\Psi &= \frac{1}{2M}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A}\right)^2\Psi \\
H\Psi &= -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\Psi + \frac{i\hbar e}{2M}\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\Psi}_{\Psi\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})}_{0}+\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\Psi)} + \frac{i\hbar e}{2M}\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\Psi + \frac{e^2}{2M}A^2\Psi \\
H\Psi &= -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\Psi + \frac{i\hbar e}{M}\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\Psi + \frac{e^2}{2M}A^2\Psi \qquad (1)
\end{aligned}$$

Tu smo uporabili Coulombovo umeritev $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$. Za homogeno konstantno magnetno polje lahko izračunamo magnetni potencial kot $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$. Preden pa zadevo razpišemo je dobro, če se prestavimo v cilindrične koordinate, saj s tem izkoristimo simetrijo našega problema. Če ima magnetno polje smer z, se magnetni potencial v cilindričnih koordinatah enostavno zapiše kot $\vec{A} = \frac{\rho B}{2}\hat{e}_\phi$. Iz tega sledi enostavno, da je izraz iz tretjega člena enačbe (1) enak $A^2\Psi = \frac{\rho^2 B^2}{4}\Psi$. Laplace in gradient se zapišeta v cilindričnih koordinatah kot:

$$\begin{aligned}
\nabla^2\Psi &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\Big) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} \\
\vec{\nabla}\Psi &= \frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}\hat{e}_\phi + \frac{\Psi}{\partial z}\hat{e}_z
\end{aligned}$$

Sedaj lahko bolj enostavno zapišemo izraz v drugem členu enačbe (1):

$$\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\Psi = \frac{B}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}$$

Zapišimo še kako zgleda celoten izraz $H\Psi = E\Psi$:

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2M}\Big(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\Big) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\Big) + \frac{i\hbar eB}{2M}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} + \frac{e^2B^2\rho^2}{8M}\Psi = E\Psi \\
-\frac{\hbar^2}{2M}\Big(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\Big) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\Big) + \frac{i\hbar\omega_c}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} + \frac{M\omega_c^2\rho^2}{8}\Psi = E\Psi \qquad (2)
\end{aligned}$$

pri čemer smo vpeljali ciklotronsko frekvenco $\omega_c = \frac{eB}{M}$. Da se znebimo prvih odvodov v členu $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\Big)$, se splača vpeljati novo funkcijo ξ kot

$$\Psi(\rho,\phi,z) = \frac{\xi(\rho,\phi,z)}{\sqrt{\rho}}$$

Po kratkem računu lahko zapišemo

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\Big) = \frac{1}{4}\rho^{-\frac{5}{2}}\xi + \rho^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^2\xi}{\partial\rho^2}$$

Vstavimo vse skupaj v enačbo (2) in dobimo:

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2M}\Big(\frac{1}{4}\rho^{-\frac{5}{2}}\xi + \rho^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^2\xi}{\partial\rho^2} + \rho^{-\frac{5}{2}}\frac{\partial^2\xi}{\partial\phi^2} + \rho^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\Big) + \frac{i\hbar\omega_c}{2}\rho^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\xi}{\partial\phi} + \frac{M\omega_c^2}{8}\rho^{\frac{3}{2}}\xi &= E\rho^{-\frac{1}{2}}\xi \\
-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2\xi}{\partial\rho^2} - \frac{\hbar^2}{2M\rho^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial\phi^2} - \frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} + \frac{i\hbar\omega_c}{2}\frac{\partial\xi}{\partial\phi} - \frac{\hbar^2}{8M\rho^2}\xi + \frac{M\omega_c^2}{8}\rho^2\xi &= E\xi \quad (3)
\end{aligned}$$

Dobljena diferencialna enačba je dovolj lepa, da se jo da separirati. Nastavek se nam kar sam ponuja

$$\xi(\rho,\phi,z) = R(\rho)e^{im\phi}e^{ikz}$$

Ta nastavek nesemo v enačbo (3) in po krajšem računu pridemo do naslednje enačbe za $R(\rho)$:

$$R'' + R\Bigg(\Big(\frac{1}{4} - m^2\Big)\frac{1}{\rho^2} - \frac{M^2\omega_c^2}{4\hbar^2}\rho^2 + \widetilde{E}\Bigg) = 0 \tag{4}$$

kjer smo vpeljali nov parameter $\widetilde{E} = \frac{2M}{\hbar^2}E + \frac{M\omega_c m}{\hbar} - k^2$. Poiščimo sedaj nastavek za $R(\rho)$, ki bo rešil to enačbo. Postopali bomo tako, da bomo najprej poiskali rešitvi za $R(\rho)$ v limiti za zelo majhen ρ in za zelo velik ρ in nato skušali obe funkcionalni odvisnosti upoštevati v splošnem nastavku.
Poglejmo si najprej limito za majhne ρ. Zadnji in predzadnji člen enačbe (4) sta zanemarljivo majhna v primerjavi z prvim členom v oklepaju, zato se enačba poenostavi:

$$R'' + R\Big(\frac{1}{4} - m^2\Big)\frac{1}{\rho^2} = 0$$

S tako enačbo smo se že večkrat srečali, reši pa jo nastavek $R = \rho^\alpha$. Ko ta nastavek vstavimo v dano diferencialno enačbo, se nam le-ta poenostavi v kvadratno algebraično enačbo, ki ima dve rešitvi za α:

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \pm |m|$$

V našem primeru je smiselna le pozitivna rešitev, torej je rešitev $R = \rho^{|m|+\frac{1}{2}}$. (Druga rešitev nam v izhodišču divergira.)
Poglejmo si še limito za velike ρ. Podobno kot prej sta dva člena v enačbi (4) zanemarljiva proti preostalim in enačba se poenostavi:

$$R'' - \frac{M^2\omega_c^2}{4\hbar^2}\rho^2 R = 0$$
$$R'' - \frac{\rho^2}{4\rho_o^4}R = 0$$

Vpeljal sem nov parameter $\rho_o = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega_c}}$. To enačbo reši nastavek $R = e^{\pm(\frac{\rho}{2\rho_o})^2}$, pri čemer pa je spet fizikalno smiselna le rešitev $R = e^{-(\frac{\rho}{2\rho_o})^2}$, saj druga rešitev za velike ρ strmo narašča.
Iz danih ugotovitev lahko sestavimo splošno rešitev, ki reši enačbo (4):

$$R(\rho) = \rho^{|m|+\frac{1}{2}} e^{-(\frac{\rho}{2\rho_o})^2} w(\rho) \tag{5}$$

Vpeljali smo novo funkcijo $w(\rho)$, o kateri ne vemo nič eksplicitnega, vemo pa, da če je $w(\rho)$ dovolj pohlevna funkcija, bo imela $R(\rho)$ željeno funkcijsko odvisnost za zelo velike

ρ in zelo majhne ρ. Ko izračunamo drugi odvod funkcije (5) in ga nesemo v enačbo (4), dobimo enačbo, kateri se pokrajša veliko členov in dobimo:

$$w'' + \frac{2}{\rho}\Big(|m| + \frac{1}{2} - \frac{\rho^2}{2\rho_o^2}\Big)w' + \Big(\widetilde{E} - \frac{1}{\rho_o^2}(|m|+1)\Big)w = 0 \tag{6}$$

Sedaj smo že čisto proti koncu. Z vpejavo nove spremenljivke $u = \rho^2$, prepoznamo enačbo (6) kot Laguerre-ovo diferencialno enačbo:

$$u\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \Big(|m| + 1 - u\Big)\frac{\partial w}{\partial u} + \lambda w = 0 \tag{7}$$

Tu sem vpeljal nov parameter $\lambda = \frac{1}{2}\rho_o^2\widetilde{E} - \frac{1}{2}(|m|+1)$, ki lahko zasede vsa nenegativna cela števila ($\lambda = 0, 1, 2, 3, ...$). V tem izrazu se skriva tudi lastna energija, zato jo poiščimo in izrazimo z ostalimi količinami:

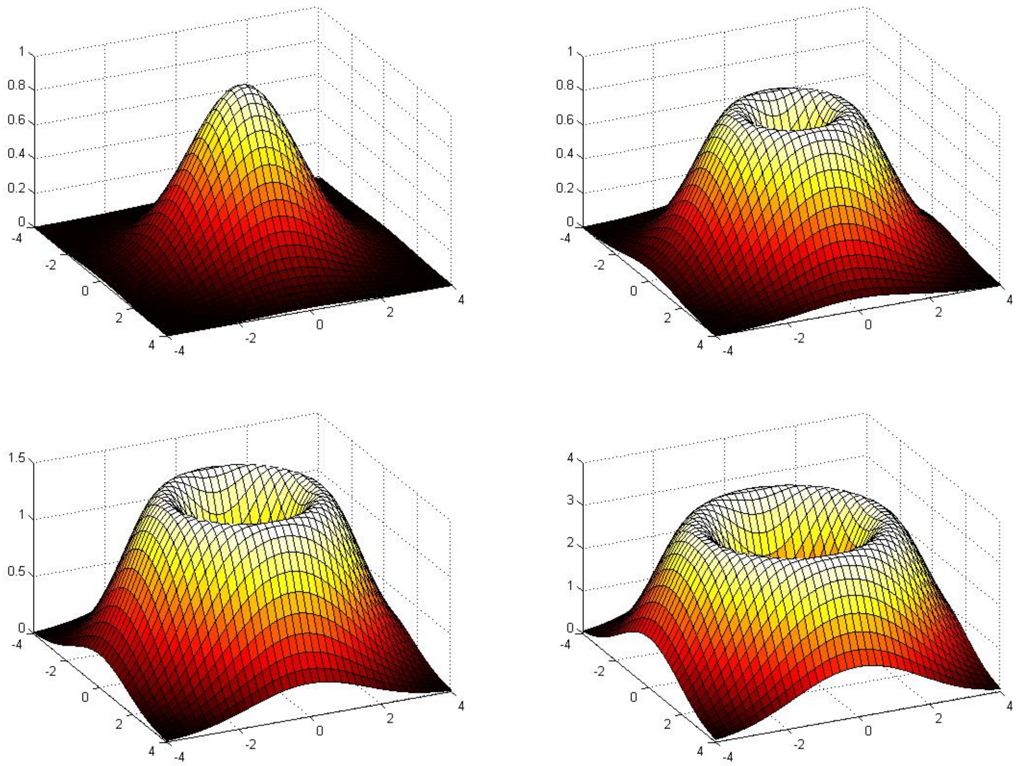
$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{2}\rho_o^2\Big(\frac{2M}{\hbar^2}E + \frac{M\omega_c m}{\hbar} - k^2\Big) - \frac{1}{2}(|m|+1) \\
\lambda &= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{M\omega_c}\Big(\frac{2M}{\hbar^2}E + \frac{M\omega_c m}{\hbar} - k^2\Big) - \frac{1}{2}(|m|+1) \\
\lambda &= \frac{1}{\hbar\omega_c}E + \frac{m}{2} - \frac{k^2\hbar}{2M\omega_c} - \frac{1}{2}(|m|+1) \\
E &= \frac{k^2\hbar^2}{2M} + \frac{\hbar\omega_c}{2}(2\lambda + |m| - m + 1) \qquad (8)
\end{aligned}$$

Dobili smo izraz za lastno energijo nabitega delca v homogenem magnetnem polju. Gibanje nabitega delca v homogenem magnetnem polju si s klasično sliko predstavljamo kot kroženje v ravnini pravokotni na magnetno polje in hkrati enakomerno gibanje vzdolž polja (odvisno od začetnih pogojev). Nabit delec torej opisuje vijačnico. Oba prispevka opazimo v izrazu za lastno energijo: prvi člen enačbe (8) predstavlja kinetično energijo delca vzdolž polja, drugi člen pa energijo, ki jo ima zaradi kroženja v ravnini pravokotni na magnetno polje. Najpomembnejša ugotovitev je, da je ta energija neskončnokrat degenerirana, saj dobimo za vsa nenegativna števila m isto energijo!
Zapišimo še lastne funkcije energije:

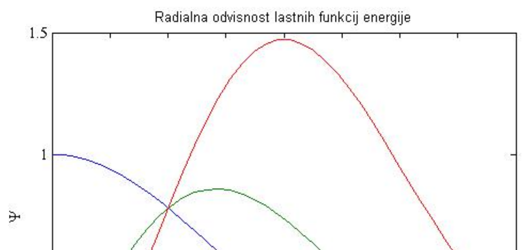
$$\Psi(\rho, \phi, z) \propto \rho^{|m|} e^{-\left(\frac{\rho}{2\rho_o}\right)^2} L_\lambda^{|m|}(\rho^2) e^{im\phi} e^{ikz} \tag{9}$$

kjer sem z $L_\lambda^{|m|}(\rho^2)$ označil prirejene Laguerrove polinome. Kako izgleda radialna odvisnost nekaterih lastnih funkcij energije prikazuje slika (1)

Poglejmo si še, kako je 'polmer' kroženja odvisen od vrtilne količine delca v magnetnem polju, to se pravi od števila m. Smiselno je, da definiramo radij kroženja z najverjetnejšo lego delca, to se pravi z maksimumom lastne funkcije. Odvajamo torej funkcijo (9) in dobimo lego vrha lastne funkcije pri $\sqrt{2|m|}\rho_o$. Radij kroženja narašča korensko v odvisnosti od $|m|$.



Slika 1: Na slikcah si povrsti sledijo lastne funkcije energije za $\lambda = 0$ in $m = 0$,$m = 1$, $m = 2$, $m = 3$. Prva lastna funcija ustreza osnovnemu stanju nabitega delca v magnetnem polju (delec nima vrtilne količine in zato miruje v izhodišču). Ostale tri lastne funkcije ustrezajo nabitemu delcu, ki kroži v magnetnem polju. Radij kroženja je vedno večji! Opomba: fukcije niso normalizirane.



Slika 2: Modra funkcija prikazuje lastno funkcijo z $\lambda = 0$ in $m = 0$, zelena ima $m = 1$ in rdeča $m = 2$. Lega vrha (radij kroženja) korensko narašča, ko povečujemo število m. Opomba: funkcije niso normalizirane!