Kritični tok v cilindrični žici

Rok Simič

Maj 2008

1 Naloga

(Ashcroft, str. 755, 3. naloga)

Po cilindrični superprevodni žici z radijem R teče kritični tok I, ki na robu žice ustvarja ravno kritično jakost magnetnega polja H_c. Ugotoviti želimo zvezo med kritičnim tokom in kritičnim poljem. Zanima nas tudi porazdelitev gostote toka in magnetnega polja znotraj žice.

2 Rešitev

Vemo, da v superprevodnem materialu velja Londonova enačba

$$\bigtriangledown \times \mathbf{j} = -\frac{ne^2}{m}\mathbf{B} \tag{1}$$

kjer je n gostota superprevodnih elektronov, e osnovni naboj in m masa elektrona. Če na zgornji enačbi uporabimo rotor in upoštevamo Maxwellovo enačbo

$$\bigtriangledown \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \tag{2}$$

dobimo enačbo za gostoto električnega toka

$$\bigtriangledown^2 \mathbf{j} = \frac{\mu_0 ne^2}{m}\mathbf{j} = \frac{\mathbf{j}}{\lambda^2} \tag{3}$$

kjer smo z $\lambda = \sqrt{\frac{\mu_0 ne^2}{m}}$, kot bo razvidno pozneje, označili vdorno globino. V našem primeru je najbolje izbrati cilindrične koordinate. Zaradi simetrije vemo, da gostota el. toka ni odvisna od koordinat φ in z, temveč le od radija r. Gostota el. toka mora biti torej oblike

$$\mathbf{j} = j(r)\mathbf{e}_\mathrm{z} \tag{4}$$

Z upoštevanjem zgornjega nastavka se v cilindričnih koordinatah enačba (3) zapiše kot

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial j(r)}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\mathrm{z} = \frac{j(r)}{\lambda^2}\mathbf{e}_\mathrm{z} \tag{5}$$

$$j''(r) + \frac{1}{r}j'(r) - \frac{1}{\lambda^2}j(r) = 0 \tag{6}$$

Rešitev take enačbe predstavljajo prirejene Besselove funkcije

$$j(r) = AJ_0(-\frac{ir}{\lambda}) + BY_0(-\frac{ir}{\lambda}) = AI_0(\frac{r}{\lambda}) + BK_0(\frac{r}{\lambda}) \tag{7}$$

Ker Besselova funkcija $K_0(\frac{r}{\lambda})$ pri *r=0* divergira, postavimo B na nič. Radialni del gostote el. toka se zdaj glasi

$$j(r) = AI_0(\frac{r}{\lambda}) \tag{8}$$

Če gostoto toka integriramo po preseku žice, dobimo celoten tok I, ki teče po žici

$$I = \int_0^R j(r)2\pi r dr = \int_0^R AI_0(\frac{r}{\lambda})2\pi r dr = 2\pi A\lambda^2 \int_0^{\frac{R}{\lambda}} I_0(x)xdx = 2\pi RA\lambda I_1(\frac{R}{\lambda}) \tag{9}$$

Pri tem svo uvedli novo spremenljivko $x = \frac{r}{\lambda}$. Izrazimo konstanto A in vstavimo v izraz za gostoto toka

$$j(r) = \frac{I}{2\pi R\lambda}\frac{I_0(\frac{r}{\lambda})}{I_1(\frac{R}{\lambda})} \Rightarrow \mathbf{j} = j(r)\mathbf{e}_z = \frac{I}{2\pi R\lambda}\frac{I_0(\frac{r}{\lambda})}{I_1(\frac{R}{\lambda})}\mathbf{e}_z \tag{10}$$

Da dobimo zvezo z magnetnim poljem, napravimo rotor gostote toka in upoštevamo enačbo (1)

$$\mathbf{B} = -\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{ne}^2}\nabla \times \mathbf{j} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{ne}^2}\frac{\partial j(r)}{\partial r}\mathbf{e}_\varphi = \frac{mI}{2\pi R\lambda^2 ne^2 I_1(\frac{R}{\lambda})}\frac{\partial I_0(\frac{r}{\lambda})}{\partial r}\mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\frac{I_1(\frac{r}{\lambda})}{I_1(\frac{R}{\lambda})}\mathbf{e}_\varphi \tag{11}$$

Dobljeno magnetno polje ima smer koordinate φ, kar je pravilno za magnetno polje, ki ga ustvarja električni tok po vodniku. Iz robnih pogojev vemo, da je jakost magnetnega polja na robu žice ravno enaka kritični jakosti H_c.

$$B(r = R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\frac{I_1(\frac{R}{\lambda})}{I_1(\frac{R}{\lambda})} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \mu_0 H_c \tag{12}$$

Dobimo iskano relacijo med kritičnim el. tokom in kritičnim magnetnim poljem

$$I_c = 2\pi RH_c \tag{13}$$

Če nas ne bi zanimala tudi radialna odvisnost gostote el. toka in magnetnega polja, bi isti rezultat lahko dobili po veliko krajši poti

$$I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi RH_c \tag{14}$$

Dodamo lahko, da bi se superprevodnost podrla v primeru toka, ki bi ustvaril magnetno polje večje od kritičnega. Dobljeni rezultat oz. relacija torej velja za tokove manjše ali enake kritičnemu toku. Spodnji sliki prikazujeta radialno odvisnost gostote električnega toka in magnetnega polja.