

# Degenerirani in nedegenerirani polprevodniki

Jaka Petelin

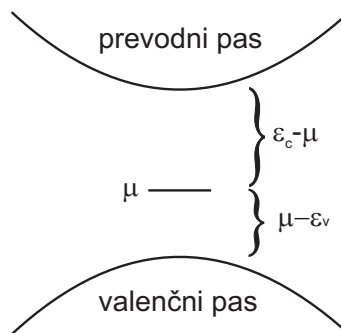
Januar, 2008

Za polprevodnike veljata enačbi za gostoto elektronov v prevodnem pasu ( $n_c$ ) in gostoto vrzeli v valenčnem pasu ( $p_v$ ):

$$n_c = \int_{\varepsilon_c}^{\infty} g_c(\varepsilon) \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} d\varepsilon$$
$$p_v = \int_{-\infty}^{\varepsilon_v} g_v(\varepsilon) \frac{1}{e^{\beta(\mu-\varepsilon)} + 1} d\varepsilon$$

pri čemer sta  $g_c(\varepsilon)$  in  $g_v(\varepsilon)$  ustrezni gostoti stanj v prevodnem oziroma valenčnem pasu,  $\mu$  pa je kemijski potencial. O nedegeneriranem polprevodniku govorimo, kadar lahko v imenovalcu zgornjih enačb zanemarimo enko, oziroma:

$$\varepsilon_c - \mu \gg kT$$
$$\mu - \varepsilon_v \gg kT$$



To pomeni, da mora biti kemijski potencial nekje vmes med valenčnim in prevodnim pasom ampak dovolj daleč od obeh (v primerjavi s  $kT$ ). V tem primeru se zgornji enačbi za gostoto elektronov in vrzeli poenostavita:

$$n_c = N_c(T) e^{-\beta(\varepsilon_c - \mu)}$$
$$p_v = P_v(T) e^{-\beta(\mu - \varepsilon_v)}$$

pri čemer velja:

$$N_c(T) = \int_{\varepsilon_v}^{\infty} g_c(\varepsilon) e^{-\beta(\varepsilon - \varepsilon_c)} d\varepsilon$$

$$P_v(T) = \int_{-\infty}^{\varepsilon_v} g_v(\varepsilon) e^{-\beta(\varepsilon_v - \varepsilon)} d\varepsilon$$

Za nadaljnji izračun bomo potrebovali gostoto stanj  $g_c$  in  $g_v$ . Gostota stanj je definirana takole:

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{V} \frac{dN}{d\varepsilon}$$

Število stanj v energijskem pasu širine  $d\varepsilon$  pa se izračuna takole:

$$dN = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} (V_K(\varepsilon + d\varepsilon) - V_K(\varepsilon))$$

pri čemer je  $V_K$  volumen v  $K$ -prostoru, vse skupaj pa je pomnoženo z 2 zaradi spina elektronov. Pri izračunu  $V_K$  moramo upoštevati še, da masa elektronov oziroma vrzeli v splošnem ni izotropna in jo opišemo s tenzorjem  $M$ . Vedno pa se lahko postavimo v lastni sistem tenzorja, pri čemer je tenzor  $M$  diagonalna matrika:

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}$$

Tako lahko v lastnem koordinatnem sistemu tenzorja  $M$  zapišemo disperzijo:

$$\varepsilon(k) = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m_1} + \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m_2} + \frac{\hbar^2 k_3^2}{2m_3}$$

Zadnja enačba opisuje elipsoid. Za volumen elipsoida, ki ga opisuje spodnja enačba velja:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

$$V = \frac{4\pi}{3} abc$$

Za računanje  $V_K(\varepsilon)$  tako upoštevamo:

$$a = \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{\hbar^2}}$$

$$b = \sqrt{\frac{2m_2\varepsilon}{\hbar^2}}$$

$$c = \sqrt{\frac{2m_3\varepsilon}{\hbar^2}}$$

$$\Rightarrow V_K(\varepsilon) = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2\varepsilon}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{m_1 m_2 m_3}$$

$$= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2\varepsilon}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\det M}$$

Podobno izračunamo tudi  $V_K(\varepsilon + d\varepsilon)$ :

$$\begin{aligned} a, b, c &= \sqrt{\frac{2m_{1,2,3}(\varepsilon + d\varepsilon)}{\hbar^2}} \\ \Rightarrow V_K(\varepsilon + d\varepsilon) &= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2\varepsilon}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\det M} \end{aligned}$$

Zadnjo enačbo razvijemo do prvega reda:

$$V_K(\varepsilon + d\varepsilon) = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2\varepsilon}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right) \sqrt{\det M}$$

Ko vse to vstavimo v enačbo za gostoto stanj dobimo:

$$g(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\det M} \sqrt{\varepsilon}$$

To enačbo primerjamo z gostoto stanj za Fermijev plin elektronov:

$$g_F(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 \hbar^3} m^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varepsilon}$$

Tako vpeljemo efektivno maso elektronov oziroma vrzeli:

$$m_{c,v}^* = (\det M_{c,v})^{\frac{1}{3}}$$

Sedaj lahko končno izračunamo izraza za  $N_c(T)$  in  $P_v(T)$ :

$$\begin{aligned} N_c(T) &= \dots = \frac{1}{4} \left(\frac{2m_c^* kT}{\pi \hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \\ P_v(T) &= \dots = \frac{1}{4} \left(\frac{2m_v^* kT}{\pi \hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Sedaj pa se vrnimo na vprašanje, pod kakšnimi pogoji je polprevodnik nedegeneriran oziroma degeneriran. Za čisti polprevodnik velja  $n_c(T) = p_v(T) = n_i(T)$ , saj vsak elektron, ki skoči v prevodni pas, za sabo pusti vrzel v valenčnem pasu. Ob upoštevanju tega lahko izračunamo:

$$\begin{aligned} N_c(T) e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} &= P_v(T) e^{-\beta(\mu - \varepsilon)} \\ \Rightarrow \ln(N_c(T)) - \beta(\varepsilon - \mu) &= \ln(P_v(T)) - \beta(\mu - \varepsilon) \end{aligned}$$

Od tod izrazimo kemijski potencial:

$$\begin{aligned} \mu = \mu_i &= \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_v}{2} + \frac{kT}{2} \ln\left(\frac{P_v}{N_c}\right) \\ &= \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_v}{2} + \frac{3kT}{4} \ln\left(\frac{m_v^*}{m_c^*}\right) \end{aligned}$$

Vidimo, da se pri dovolj nizkih temperaturah kemijski potencial nahaja točno na sredini energijske reže, oziroma, če vpeljemo širino energijske reže  $E_g = \varepsilon_c - \varepsilon_v$ :

$$\mu - \varepsilon_v = \frac{E_g}{2} + \frac{3kT}{4} \ln \left( \frac{m_v^*}{m_c^*} \right)$$

Iz zadnje enačbe vidimo, da bo pri dovolj nizkih temperaturah  $\mu - \varepsilon_v \approx \frac{E_g}{2}$ . Prvotni pogoj za nedegeneriranost polprevodnika pa je bil  $\mu - \varepsilon_v \gg kT$ . Ta pogoj je torej izpolnjen, če velja:

$$E_g \gg kT$$

Energija reže  $E_g$  je tipično reda velikosti  $1 \text{ eV}$ ,  $kT$  pa ima pri sobni temperaturi vrednost približno  $\frac{1}{40} \text{ eV}$ . Vidimo, da je čisti polprevodnik pri normalnih pogojih vedno nedegeneriran in je bila prvotna poenostavitev izrazov za  $n_c$  in  $p_v$  upravičena.

Pri dopiranem polprevodniku pa velja:

$$\begin{aligned} n_c &\neq p_v \\ n_c - p_v &= \Delta n \end{aligned}$$

Za nedegeneriran, dopiran polprevodnik lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} n_c &= n_i e^{\beta(\mu - \mu_i)} \\ p_v &= n_i e^{-\beta(\mu - \mu_i)} \end{aligned}$$

pri čemer je  $\mu_i$  kemijski potencial čistega polprevodnika. Tako sledi:

$$\frac{\Delta n}{n_i} = 2 \sinh \beta (\mu - \mu_i)$$

Dopiran polprevodnik postane (podobno kot nedopiran) degeneriran takrat, ko se kemijski potencial preveč približa robu valenčnega ali prevodnega pasu. Takrat je  $|\mu - \mu_i| \gg kT$ , saj se intrinzični kemijski potencial  $\mu_i$  še vedno nahaja približno na sredini energijske reže. Posledično je izraz  $2 \sinh \beta (\mu - \mu_i) \gg 1$ . Tako vidimo, da postane dopiran polprevodnik degeneriran takrat, ko je  $\left| \frac{\Delta n}{n_i} \right| \gg 1$ , torej kadar imamo opravka z močno dopiranim polprevodnikom.