Simetrijska grupa kubične mreže

Simon Čopar

11. november 2007

1 Opis grupe

Rotacijska grupa je množica vseh rotacij in psevdorotacj, ki kocko preslikajo samo vase. Število orientacij enostavno določimo: vsaka ploskev je lahko na vrhu (6), vsakič je lahko kocka rotirana na (4) različne načine, vse od teh konfiguracij imajo še svojo zrcalno sliko po inverziji prostora (2), skupaj $6 \otimes 4 \otimes 2 = 38$. Ker gre za rotacije, je ta grupa podgrupa $O(3)$, reprezentiramo pa jo lahko s pomočjo matrik 3×3. Ker v vseh orientacijah koordinatne osi kažejo vzdolž istih smeri v prostoru, so elementi matrike lahko samo $1, -1$. Vsako rotacijo lahko enolično predstavimo s koordinatnim trirobom, ki ga v osnovnem stanju postavimo v oglišče kocke. Stolpci matrike predstavljajo smeri kamor kažejo ustrezne koordinatne osi. Kratek račun potrdi število elementov: obstaja 3! permutacij osi, vsaka kaže lahko v pozitivno ali negativno smer, skupaj $2^3 3! = 48$.

2 Simetrijske osi

Iz zvezne rotacijske grupe $SO(3)$ vemo, da lahko vsako orientacijo izrazimo z osjo rotacije in kotom. Za popis vseh rotacij potrebujemo produkt 3 rotacij okrog paroma nekolinearnih osi (npr. Eulerjevi koti). Izkazalo se bo, da v primeru kocke potrebujemo le 2 izmed 3 rotacij okrog koordinatnih osi.

Kocka ima

- **3 4-števne osi**, ki potekajo vzdolž vektorjev x,y,z.
- **4 3-števne osi**, izberimo jih simetrično vzdolž vektorjev $x+y+z$,$-x+y+z$,$x-y+z$,$x+y-z$.
- **6 2-števnih osi**, vzdolž diagonal ploskev, $x+y$,$y+z$,$y+x$,$-x+y$,$-y+z$,$-z+x$.

Na podlagi zgoraj povedanega bo 24 pravih rotacij (brez zrcaljenj) izraženih z zgoraj naštetimi rotacijami.

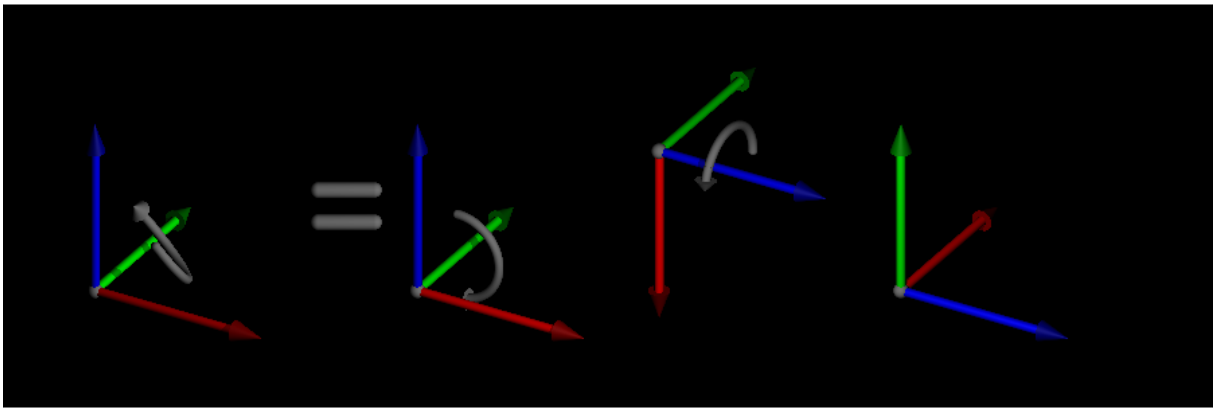
3 Cayleyeva tabela

S pomočjo množenja parov rotacij okrog koordinatnih osi (poleg identitete ima vsaka od teh osi 3 "kote" rotacije) bomo izrazili vseh 24 pravih rotacij (identiteto označimo z c_0).

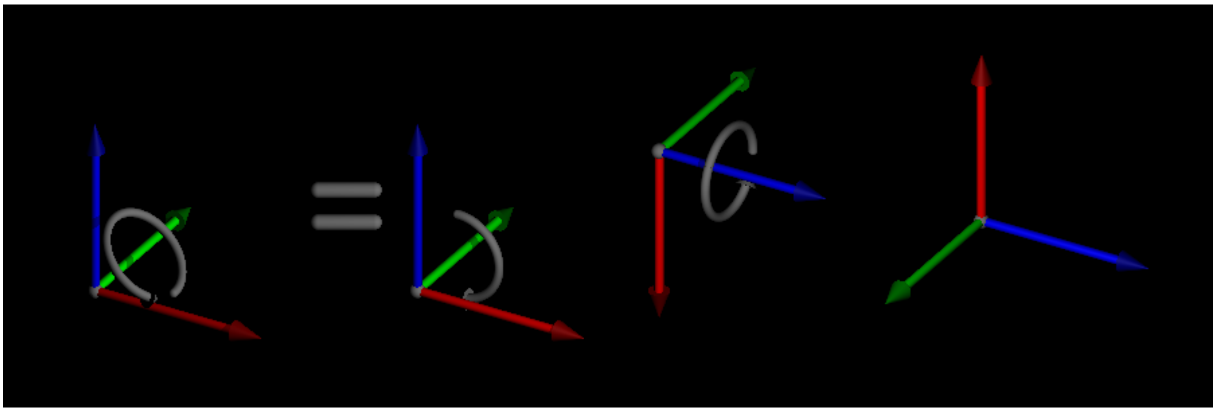
c_0	${}^{x}c_4^1$	${}^{x}c_4^2$	${}^{x}c_4^3$	${}^{y}c_4^1$	${}^{y}c_4^2$	${}^{y}c_4^3$	${}^{z}c_4^1$	${}^{z}c_4^2$	${}^{z}c_4^3$
${}^{x}c_4^1$	${}^{x}c_4^2$	${}^{x}c_4^3$	c_0	${}^{0}c_3^+$	${}^{x}c_2$	${}^{x}c_3^+$	${}^{y}c_3^-$	${}^{\overline{x}}c_2$	${}^{z}c_3^-$
${}^{x}c_4^2$	${}^{x}c_4^3$	c_0	${}^{x}c_4^1$	${}^{y}c_2$	${}^{z}c_4^2$	${}^{\overline{y}}c_2$	${}^{\overline{z}}c_2$	${}^{y}c_4^2$	${}^{z}c_2$
${}^{x}c_4^3$	c_0	${}^{x}c_4^1$	${}^{x}c_4^2$	${}^{y}c_3^+$	${}^{\overline{x}}c_2$	${}^{z}c_3^+$	${}^{x}c_3^-$	${}^{x}c_2$	${}^{0}c_3^-$
${}^{y}c_4^1$	${}^{z}c_3^-$	${}^{\overline{y}}c_2$	${}^{x}c_3^-$	${}^{y}c_4^2$	${}^{y}c_4^3$	c_0	${}^{0}c_3^+$	${}^{y}c_2$	${}^{y}c_3^+$
${}^{y}c_4^2$	${}^{\overline{x}}c_2$	${}^{z}c_4^2$	${}^{x}c_2$	${}^{y}c_4^3$	c_0	${}^{y}c_4^1$	${}^{z}c_2$	${}^{x}c_4^2$	${}^{\overline{z}}c_2$
${}^{y}c_4^3$	${}^{y}c_3^-$	${}^{y}c_2$	${}^{0}c_3^-$	c_0	${}^{y}c_4^1$	${}^{y}c_4^2$	${}^{z}c_3^+$	${}^{\overline{y}}c_2$	${}^{x}c_3^+$
${}^{z}c_4^1$	${}^{0}c_3^+$	${}^{z}c_2$	${}^{z}c_4^-$	${}^{x}c_3^-$	${}^{\overline{z}}c_2$	${}^{y}c_3^-$	${}^{z}c_4^2$	${}^{z}c_4^3$	c_0
${}^{z}c_4^2$	${}^{x}c_2$	${}^{y}c_4^2$	${}^{\overline{x}}c_2$	${}^{\overline{y}}c_2$	${}^{x}c_4^2$	${}^{y}c_2$	${}^{z}c_4^3$	c_0	${}^{z}c_4^1$
${}^{z}c_4^3$	${}^{x}c_3^+$	${}^{\overline{z}}c_2$	${}^{y}c_4^-$	${}^{z}c_3^-$	${}^{z}c_2$	${}^{0}c_3^-$	c_0	${}^{z}c_4^1$	${}^{z}c_4^2$

Rotacije okrog vsake izmed osi so modularna podgrupa naše grupe, $c_n = \mathbb{Z}_n$. Opazimo tudi

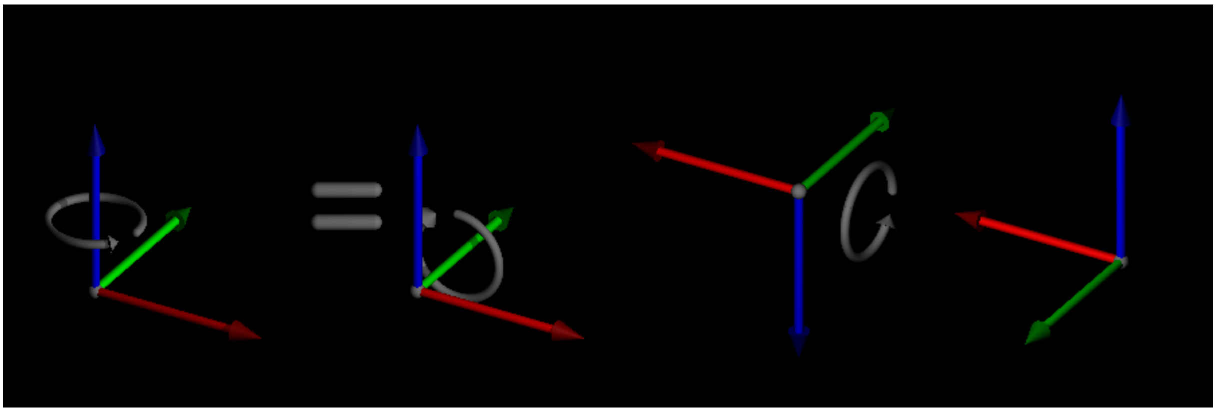
$$ {}^{x}c_4^2 \, {}^{y}c_4^2 \, {}^{z}c_4^2 = \quad c_0 $$



Slika 1: Ponazoritev rotacije ${}^{0}c_3^1$ kot produkt rotacij okrog koordinatnih osi.



Slika 2: Rotacija okrog simetrale stranice ${}^{y}c_2$.



Slika 3: Ponazoritev rotacije ${}^{z}c_4^2$. Rotacije za pol obrata okrog vseh treh osi v poljubnem vrstnem redu da identiteto.

4 Zrcaljenja

Drugih 24 elementov grupe dobimo tako, da pomnožimo vse zgoraj dobljene rotacije z operatorjem inverzije prostora. Inverzija prostora komutira z vsemi ostalimi operatorji ker je mnogokratnik identitete. Dve zaporedni zrcaljenji ohranita parnost in sta ekvivalentni dvakratnim rotacijam okrog ustrezne osi. Enako velja za zaporedje inverzije in zrcaljenja.

$$\sigma_i\sigma_j = {}^{k}c_4^2$$

$$\sigma_i^2 = c_0$$

$$-\sigma_i = \sigma_j\sigma_k = {}^{i}c_4^2$$

Posebno pozornost si zaslužijo še operatorji oblike

$$\sigma_{yz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ki zrcalijo preko ploskovnih diagonal. Tak operator je ekvivalenten rotaciji komponirani z zrcaljenjem.

$$\sigma_{yz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_y \, {}^{x}c_4^1 = \sigma_z \, {}^{x}c_4^3 = -\, {}^{\overline{x}}c_2$$

Na koncu sem izrazil z rotacijo in inverzijo prostora.

5 Množenje poljubnega para rotacij

Po zgornji tabeli poljubno rotacijo lahko zapišemo kot produkt dveh rotacij okrog osnovnih osi na različne načine. Z izbiro primerne kombinacije se izraz lahko poenostavi. Primer za ${}^{x}c_3^+ \, {}^{\overline{z}}c_2$:

$$
\begin{aligned}
{}^{x}c_3^+ &= {}^{y}c_4^3 \, {}^{x}c_4^1 = {}^{z}c_4^3 \, {}^{y}c_4^3 = {}^{x}c_4^1 \, {}^{z}c_4^3 \\
{}^{\overline{z}}c_2 &= {}^{x}c_4^2 \, {}^{z}c_4^3 = {}^{y}c_4^2 \, {}^{z}c_4^1 = {}^{z}c_4^1 \, {}^{x}c_4^2 = {}^{z}c_4^3 \, {}^{y}c_4^2
\end{aligned}
$$

Izberemo tako, da sta rotaciji v sredini iste vrste.

$${}^{x}c_3^+ \, {}^{\overline{z}}c_2 = {}^{x}c_4^1 \, {}^{z}c_4^3 \, {}^{z}c_4^1 \, {}^{x}c_4^2 = {}^{x}c_4^1 \, {}^{x}c_4^2 = {}^{x}c_4^3$$