

Toplotna kapaciteta feromagnetnih magnonov

Peter Jakopič
21.4.2008

1 Naloga:

Uporabi približno zvezo za disperzijo magnonov $\omega = Ak^2$ in izračunaj prvi člen v toploti kapaciteti tri-dimenzionalnega feromagneta pri nizkih temperaturah $k_B T \ll J$.¹

2 Disperzijska zveza za feromagnetne fonone.

V Heisenbergovemu modelu hamilton magnetne interakcije zapišemo kot:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \vec{S}_j \quad (1)$$

kjer je $J = J(R)$ in R razdalja med najbližjima sosedoma.

Osnovno stanje ψ_0 spinov v feromagnetu si lahko predstavljamo kot na sliki 1.

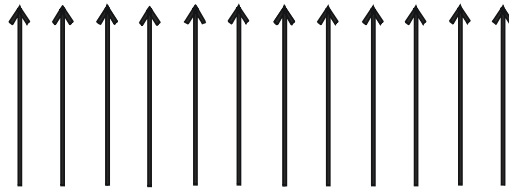


Figure 1: Osnovno stanje spinov $|\psi_0\rangle$ v 1D modelu.

Če z \hat{S}_i^- označimo operator, ki obrne spin na i -tem elektronu lahko zapišemo vzbujeno valovno funkcijo kot (slika 2):

$$|\varphi_i\rangle = \hat{S}_i^- |\psi_0\rangle \quad (2)$$

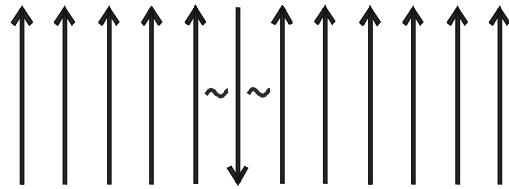


Figure 2: Primer vzbujenega stanja spinskega sistema. Prikazana je funkcija $|\varphi_i\rangle$. (V konkretnem primeru $i = 6$).

Tako vzbujeno stanje pa ni lastno stanje hamiltoniana v En.(1), kar pokažemo tako, da hamiltonijan razpišemo:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \left[S_i^z S_j^z + \frac{1}{2} (S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+) \right] \quad (3)$$

¹C.Kittel, Introduction to Solid State Physics, eight edition, (John Wiley & Sons, 2005) str 357, 2. naloga

kjer je $S_i^\pm = S_i^x \pm iS_i^y$, in delujemo na stanje En.(2):

$$\begin{aligned} H|\varphi_i\rangle &= \left\{ -J \sum_{\langle i,j \rangle} \left[S_i^z S_j^z + \frac{1}{2} (S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+) \right] \right\} |\varphi_i\rangle \\ &= \left(E_0 + \frac{Jz}{2} \right) |\varphi_i\rangle - \frac{J}{2} \sum_{j=n.s.} |\varphi_j\rangle \end{aligned} \quad (4)$$

kjer je z število najbližjih sosedov, za velikost spina pa smo vzeli. Prva dva člena prideta iz operatorjev $S_i^z S_j^z$, ki dajo osnovno stanje, popravljeno za vsoto produktov obrnjenega spina z njegovimi najbližjimi sosedi, zadnji člen pa pride iz operatorjev $\frac{1}{2} (S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+)$, ki obrnejo stanja na vseh najbližjih sosedi. (Lastna vrednost S_i^z je $\pm 1/2$). Stanje iz slike 2 torej ni lastno stanje Heisenbergovega hamiltonjana.

Heisenbergov hamiltonijan očitno sklaplja funkcije $|\varphi_i\rangle$, ki imajo v mreži obrnjen le en spin, zato bo dober kandidat za lastno funkcijo neka linearna kombinacija teh funkcij. Zapišemo nastavek v obliki spinskih valov oz. magnonov:

$$|\phi_{\mathbf{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_i} |\varphi_i\rangle \quad (5)$$

kjer je \mathbf{R}_i vektor do posameznega spina in N število spinov v mreži. (Funkcija je normalizirana tako, da je skupni spin ravno 1). Ko na enačbo En.(5) delujemo z Heisenbergovim hamiltonjanom dobimo:

$$H|\phi_{\mathbf{k}}\rangle = (E_0 + \varepsilon_{\mathbf{k}}) |\phi_{\mathbf{k}}\rangle \quad (6)$$

kjer je

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{Jz}{2} - \frac{J}{2} \sum_{\mathbf{R} \text{ do } n.s.} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} = \frac{J}{2} \sum_{\mathbf{R} \text{ do } n.s.} (1 - e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}) \quad (7)$$

Ker je $J(-\mathbf{R}) = J(\mathbf{R})$ in najbližji sosedi vedno nastopajo v parih lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} (1 - e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}) + (1 - e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}}) &= 2 - e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} - e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}} = \\ &= 2 - 2 \cos \mathbf{k}\mathbf{R} = \\ &= 4 \sin^2 \frac{\mathbf{k}\mathbf{R}}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

Dobimo:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = J \sum_{\mathbf{R} \text{ do } n.s.} \sin^2 \frac{\mathbf{k}\mathbf{R}}{2} \quad (9)$$

3 Toplotna kapaciteta magnonov

Magnoni se v mreži spinov za dovolj majhne gostote obnašajo kot bozoni (npr. fotoni, fononi), zato uporabimo znani formalizem. Skupno energijo magnonov zapišemo kot:

$$E = \sum_k n_k \varepsilon_k \quad (10)$$

kjer je n_k število vzbujenih stanj pri valovnem številu k in je podano z Bose-Einsteinovo porazdelitvijo:

$$n_k = \frac{1}{\exp(\varepsilon_k/k_B T) - 1} \quad (11)$$

Skupno energijo lahko zapišemo v obliki integrala:

$$E = \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{\exp(\varepsilon/k_B T) - 1} g(\varepsilon) d\varepsilon \quad (12)$$

kjer je $g(\varepsilon)$ gostota stanj. Za nizke temperature bo vrednost pod integralom različna od nič samo v primeru, ko bo red velikosti ε_k manjši ali enak redu velikosti $k_B T$. Ker nas zanima primer, ko je $k_B T \ll J$, lahko lahko izraz En.(9) razvijemo:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = J \sum_{j=n.s.} \left(\frac{\mathbf{kR}_j}{2} \right)^2 \quad (13)$$

Ker v nalogi nimamo točno podane oblike mreže zapišemo $\varepsilon_k = \alpha k^2$, ($\alpha = \hbar A$) kjer smo upoštevali simetrijo mreže. Gostoto stanj v En.(12) dobimo kot:

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &= \frac{1}{V} \frac{dN_k}{d\varepsilon} = \\ &= \frac{1}{V} \frac{1}{2\alpha k} 4\pi k^2 \frac{V}{(2\pi)^3} = \\ &= \frac{\sqrt{\varepsilon}}{4\pi^2 \alpha^{3/2}} \end{aligned} \quad (14)$$

Za energijo na enoto volumna dobimo torej:

$$\begin{aligned} \frac{E}{V} &= \int_0^\infty \frac{1}{\exp(\varepsilon_k/k_B T) - 1} \varepsilon \frac{\sqrt{\varepsilon}}{4\pi^2 \alpha^{3/2}} d\varepsilon = \\ &= \frac{(k_B T)^{5/2}}{4\pi^2 \alpha^{3/2}} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx = \\ &= \frac{3(k_B T)^{5/2}}{16\pi^{3/2} \alpha^{3/2}} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \end{aligned} \quad (15)$$

Toplotno kapaciteto na enoto volumna izrazimo kot

$$\begin{aligned} C_v &= \frac{\partial E}{\partial T} = \\ &= \frac{15}{32\pi^{3/2}} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) k_B \left(\frac{k_B T}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} = \\ &= 0.113 * k_B \left(\frac{k_B T}{\alpha}\right)^{3/2} \end{aligned} \quad (16)$$