Domača naloga pri Fiziki trdne snovi: Fermijeva površina v približku šibkega potenciala

Marko Mravlak

18. januar 2008

Naloga: Analiziraj spreminjanje Fermijeve površine v bližini Braggove ravnine v šibkem periodičnem potencialu $U_{\mathbf{K}} \neq 0$ za dvodimenzionalno kvadratno mrežo.

Rešitev: Za lastno energijo elektronov v bližini Braggove ravnine smo v modelu skoraj prostih elektronov (šibki periodični potencial) izpeljali enačbo:

$$\epsilon = \frac{\epsilon^0_{\mathbf{q}} + \epsilon^0_{\mathbf{q}-\mathbf{K}}}{2} \pm \left[\left(\frac{\epsilon^0_{\mathbf{q}} - \epsilon^0_{\mathbf{q}-\mathbf{K}}}{2} \right)^2 + |U_{\mathbf{K}}|^2 \right]^{1/2} \tag{1}$$

Vektor $\mathbf{K}$ določa Braggovo ravnino, $\mathbf{q}$ pa je valovni vektor elektrona, katerega lastno energijo računamo.

Valovni vektor $\mathbf{q}$ gledamo v okolici točke $\frac{1}{2}\mathbf{K}$ na Braggovi ravnini. Ko zapišemo $\mathbf{q} = \frac{1}{2}\mathbf{K} + \mathbf{k}$ in razstavimo $\mathbf{k}$ na vzporedno ($k_{\parallel}$) in pravokotno komponento ($k_{\perp}$) glede na $\mathbf{K}$, dobimo

$$\epsilon = \epsilon^0_{\mathbf{K}/2} + \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \pm \left(4\epsilon^0_{\mathbf{K}/2} \frac{\hbar^2}{2m} k_{\parallel}^2 + |U_{\mathbf{K}}|^2 \right)^{1/2} \tag{2}$$

Fermijevo energijo ϵ_F merimo glede na najmanjšo vrednost od pasov, ki jih poda enačba (2):

$$\epsilon_F = \epsilon^0_{\mathbf{K}/2} - |U_{\mathbf{K}}| + \Delta \tag{3}$$

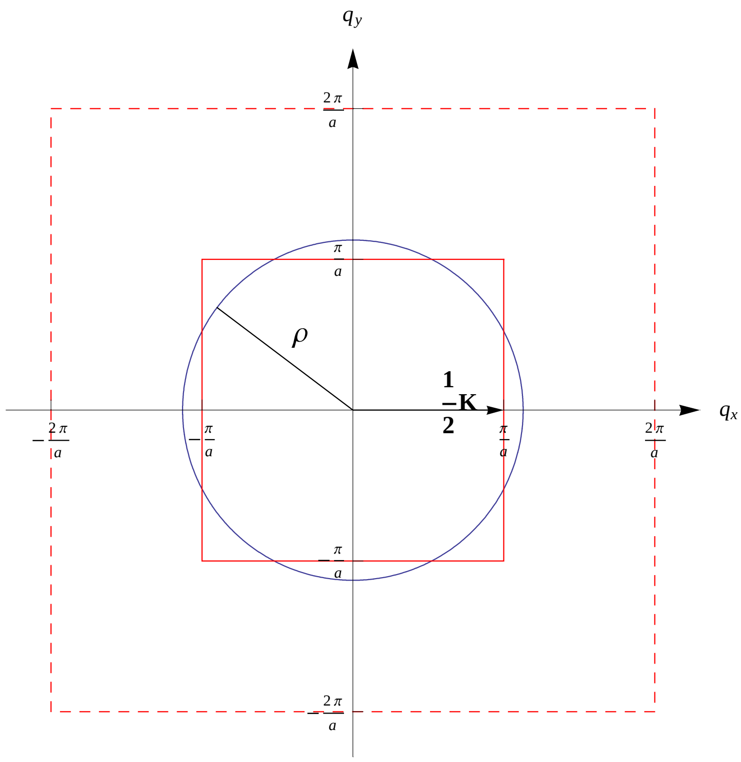
Oglejmo si spreminjanje Fermijeve površine na desnem robu dvodimenzionalne kvadratne mreže kot je prikazana na Sliki (1). Braggovo ravnino določa vektor $\frac{1}{2}\mathbf{K} = (\frac{\pi}{a}, 0)$, vektor $\mathbf{k}$ pa razstavimo glede na $\mathbf{K}$ na vzporedno in pravokotno komponento: $\mathbf{k} = (q_x, q_y)$. Zanima nas, kako se spreminja energija na Braggovi ravnini, zato postavimo vzporedno komponento $q_x = 0$.

Za energijski razcep na tej Braggovi ravnini sledi po enačbi (2):

$$\epsilon = \epsilon^0_{\mathbf{K}/2} + \frac{\hbar^2}{2m} q_y^2 \pm |U_{\mathbf{K}}| \tag{4}$$

Zanima nas kdaj Fermijeva površina seka Braggovo ravnino. Tedaj je $\epsilon_F = \epsilon$, sledi

$$\epsilon^0_{\mathbf{K}/2} - |U_{\mathbf{K}}| + \Delta = \epsilon^0_{\mathbf{K}/2} + \frac{\hbar^2}{2m} q_y^2 \pm |U_{\mathbf{K}}| \tag{5}$$



Slika 1: Fermijeva površina (modro) in Braggova ravnina (rdeče) za dvodimenzionalno kvadratno mrežo.

Torej

$$q_y^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(\Delta - |U_{\mathbf{K}}| \mp |U_{\mathbf{K}}|) \tag{6}$$

Med rešitvami ločimo tri primere:

- $\Delta < 0$
  Fermijeva površina ne seka Braggove ravnine
- $0 < \Delta < |U_{\mathbf{K}}|$
  Fermijeva površina leži v celoti v spodnjem pasu in seka Braggovo ravnino v krogu z radijem
  $$\rho = \sqrt{\frac{2m\Delta}{\hbar^2}}$$
- $\Delta > 2|U_{\mathbf{K}}|$
  Spodnji pas: $q_y^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(\Delta - 2|U_{\mathbf{K}}|)$, zgornji pas: $q_y^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\Delta$.
  Fermijeva površina leži v obeh pasovih in deli Braggovo ravnino v dveh krogih z radijema ρ_1 in ρ_2. Razlika v površini obeh krogov je
  $$\pi(\rho_2^2 - \rho_1^2) = \frac{4m\pi}{\hbar^2}|U_{\mathbf{K}}|\ .$$