FIZIKA TRDNE SNOVI 2007/08

Zaporna plast v n-p stiku

Žiga Lenarčič*

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

20. februar 2008

1 Naloga

Pokazali bomo, da se Poissonova enačba

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}$$

na p-n stiku zapiše kot diferencialna enačba za funkcijo $\psi(x) = \beta(e\phi(x) + \mu - \mu_i)$ v obliki

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = K^2 \left[\sinh \psi(x) - \frac{\Delta N(x)}{2n_i} \right], \tag{1}$$

kjer je $K^2 = \frac{2n_i e^2 \beta}{\epsilon\epsilon_0}$, $\Delta N(x) = N_d(x) - N_a(x)$, μ_i in n_i pa sta intrinzični (za nedopiran polprevodnik) kemijski potencial in intrinzična gostota nosilcev naboja pri isti temperaturi. Izpeljali bomo rešitev $\psi(x)$ za primer $n_i >> N_d, N_a$, ko privzamemo $\sinh \psi(x) \approx \psi(x)$.

2 Rešitev

2.1 Prevedba Poissona na diferencialno enačbo s $\psi(x) = \beta(e\phi(x) + \mu - \mu_i)$

V enodimenzionalnem primeru (p-n stik obravnavamo le v eni dimenziji) zapišemo Poissonovo enačbo v obliki

$$\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon\epsilon_0}. \tag{2}$$

V našem primeru računamo, kot da so vsi donorji in akceptorji ionizirani, zato k naboju prispevata kar celotni koncentraciji dopantov N_d in N_a:

$$\rho(x) = e[\underbrace{N_d(x) - N_a(x)}_{\Delta N(x)} - n_c(x) + p_v(x)]$$

Gostoti n_c in p_v lahko izrazimo v odvisnosti od kemijskega potenciala tako

$$n_c = e^{\beta(\mu - \mu_i)} n_i \qquad p_v = e^{-\beta(\mu - \mu_i)} n_i,$$

vendar moramo v našem primeru, ko imamo še spreminjajoč potencial v eksponent dodati še člen $e\phi(x)$. Z uvedbo nove spremenljivke $\psi = \beta(e\phi + \mu - \mu_i)$ se gostoti zapišeta:

$$n_c(x) = e^{\beta(e\phi(x) + \mu - \mu_i)} n_i = e^{\psi(x)} n_i \qquad p_v(x) = e^{-\beta(e\phi(x) + \mu - \mu_i)} n_i = e^{-\psi(x)} n_i$$

*e-mail naslov: *ziga.lenarcic@student.fmf.uni-lj.si.*

Sedaj uporabimo še zvezo $2\sinh x = e^x - e^{-x}$ ter zapišemo gostoto naboja kot

$$\rho(x) = -e[2n_i \sinh\psi - \Delta N(x)].$$

Oglejmo si drugi odvod fukcije $\psi(x) = \beta(e\phi(x) + \mu - \mu_i)$ po x - preživi le prvi člen, saj sta μ in μ_i neodvisna od x. Torej velja $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = e\beta\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$. To in gostoto naboja vtaknemo v enodimenzionalno Poissonovo enačbo (2) in, če malo premečemo, dobimo enačbo

$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} = \frac{2n_i e^2\beta}{\epsilon\epsilon_0}\left[\sinh\psi(x) - \frac{\Delta N(x)}{2n_i}\right],$$

ki je enaka enačbi (1) za $K^2 = 2n_i e^2\beta/\epsilon\epsilon_0$.

2.2 Primer šibko dopiranega polprevodnika: $n_i >> N_d, N_a$

Pogledali si bomo primer šibko dopiranega (skoraj intrinzičnega) polprevodnika. V tem primeru se izkaže, da je $\psi(x) << 1$, kar nam da uporabno aproksimacijo $\sinh\psi(x) \approx \psi(x)$, ki nam bo omogočala izračun rešitve $\psi(x)$ okrog stika p-n. Zaenkrat še ni jasno, zakaj iz $n_i >> N_d, N_a$ sledi $\psi(x) << 1$, bo pa razvidno iz rešitve, zakaj je $\psi(x) << 1$ dober privzetek za naš primer.
Zanima nas rešitev diferencialne enačbe

$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} - K^2\psi(x) = -\frac{K^2\Delta N(x)}{2n_i},$$

pri čemer sta K^2 in n_i konstanti, $\Delta N(x) = N_d(x) - N_a(x)$ pa je tudi konstanten za območji $x < 0$ (p-tip polprevodnika) in $x \geq 0$ (n-tip polprevodnika), in sicer zavzame vrednosti $-N_a$ ter N_d na omenjenih dveh intervalih. N_d je gostota donorjev v n-tipu polprevodnika, N_a pa gostota akceptorjev v p-tipu.

Šnelkurz reševanja zgornje diferencialne enačbe

Rešitev $\psi(x)$ bomo dobili s pomočjo konvolucije Greenove funkcije in desnega dela enačbe. Greenova funkcija je funkcija ψ_G, ki reši diferencialno enačbo za delta funkcijo

$$\frac{\partial^2\psi_G(x)}{\partial x^2} - K^2\psi_G(x) = \delta(x) \tag{3}$$

Rešitev zgornje enačbe (3) v homogeni različici (desna stran je 0) se v splošnem glasi $\psi(x) = Ae^{Kx} + Be^{-Kx}$. Ker ne želimo, da rešitev raste v neskončnost vzamemo le padajočo eksponentno funkcijo. Rešitev je sedaj oblike $\psi(x) = Ae^{-K|x|}$. Konstanto A določimo tako, da enačbo (3) integriramo okrog $x = 0$ in gledamo limito, ko gre interval integracije proti 0. Zapišemo

$$\lim_{\Delta\to 0}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2}\frac{\partial^2\psi_G(x)}{\partial x^2}dx - \underbrace{\lim_{\Delta\to 0}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2}K^2\psi_G(x)dx}_{=0} = \underbrace{\lim_{\Delta\to 0}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2}\delta(x)dx}_{=1}. \tag{4}$$

Integral delta funkcije je seveda 1, integral $\psi_G(x)$ je, ko gremo z intervalom proti 0 enak 0, saj je ψ_G zvezna pri $x = 0$. V prvi člen vstavimo odvod našega nastavka $\psi_G = Ae^{-K|x|}$:

$$\lim_{\Delta\to 0}\psi_G'(x)|_{-\Delta/2}^{\Delta/2} = \lim_{\Delta\to 0}(A(-K)e^{-K|x|})|_{-\Delta/2}^{\Delta/2} = -2AK = 1 \tag{5}$$

Dobimo koeficient $A = (-2K)^{-1}$ in naša Greenova funkcija se v končni verziji glasi

$$\psi_G(x) = -\frac{1}{2K}e^{-K|x|} \tag{6}$$

Skonvolviramo jo z desno stranjo originalne diferencialne enačbe ter tako dobimo rešitev $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{K^2\Delta N(x')}{2n_i}\psi_G(x - x')dx' = \frac{K}{4n_i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-K|x-x'|}\Delta N(x')dx' \tag{7}$$

Izračun integrala

Ta integral lahko izračunamo analitično po delih (kar nekaj dela). Najprej razrešimo absolutno vrednost in vrednost $\Delta N(x)$.

$$|x-x'| = \begin{cases} x-x'; & x'<x \\ x'-x; & x'>x \\ 0 \quad ; & x'=x \end{cases} \tag{8}$$

$$\Delta N(x) = \begin{cases} -N_a; & x<0 \\ N_d \quad ; & x \geq 0 \end{cases} \tag{9}$$

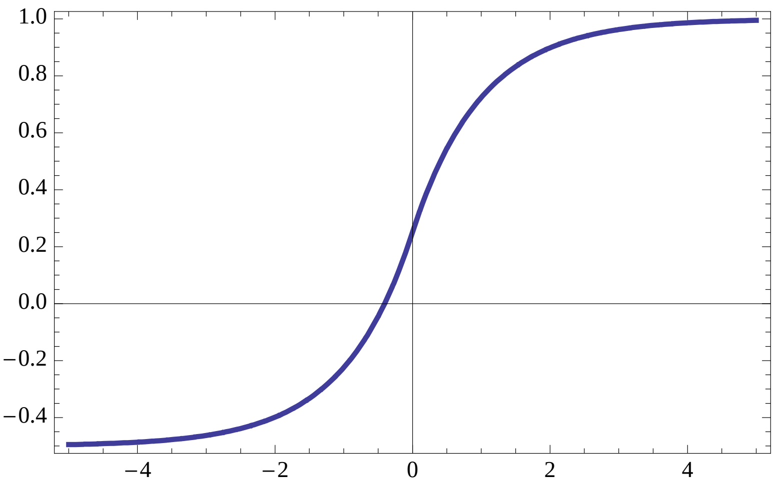
Sedaj ločimo izračuna za $\psi(x<0)$ in $\psi(x \geq 0)$. Pripravimo si tudi nedoločena integrala $\int \exp -K(x-x')dx' = \frac{1}{K}\exp -K(x-x')$ in $\int \exp -K(x'-x)dx' = -\frac{1}{K}\exp -K(x-x')$. Integrala bom označeval z 1 in 2. Zapišemo:

$$\begin{aligned} \psi(x<0) = \frac{K}{4n_i}\left[-N_a\int_{-\infty}^{x} 1dx' - N_a\int_{x}^{0} 2dx' + N_d\int_{0}^{\infty} 2dx'\right] = \\ = \frac{1}{4n_i}\left[-N_a + N_a e^{Kx} - N_a + N_d e^{Kx}\right] \end{aligned} \tag{10}$$

Podoben integral naredimo za $\psi(x>0)$, le da so tokrat intervali $[-\infty,0]$,$[0,x]$ in $[x,\infty]$. Tako dobimo zlepljeno funkcijo - rešitev:

$$\begin{aligned} \psi(x<0) &= \frac{1}{4n_i}\left[e^{Kx}(N_d+N_a) - 2N_a\right] \\ \psi(x \geq 0) &= \frac{1}{4n_i}\left[-e^{-Kx}(N_d+N_a) + 2N_d\right] \end{aligned} \tag{11}$$

Iz rešitve je sedaj razvidno, da je naš privzetek $n_i >> N_d, N_a \to \psi << 1$ dober, saj je rešitev $\psi(x)$ "ujeta" med $-\frac{N_a}{2n_i} \leq \psi(x) \leq \frac{N_d}{2n_i}$, kar pomeni $|\psi| << 1$.



Slika 1: Graf funkcije $\psi(x)$ za poskusne vrednosti $N_d = 2$ in $N_a = n_i = K = 1$.