Fizika trdne snovi 2007/2008

Cooperjev problem

domača naloga

Matej Tekavčič 28030012

28.5.2008

Obravnavamo Cooperjev problem. Imamo par elektronov v singletnem stanju, ki ju opišemo z valovno funkcijo, za katero predpostavimo, da je odvisna le od razdalje med elektronoma

$$\chi(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}) \equiv \chi(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}) = \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \chi(\mathbf{k}) \exp[\mathrm{i}\mathbf{k}(\mathbf{r_1}) - \mathbf{r_2})] \,. \tag{1}$$

Zapišimo Schrödingerjevo enačbo za dva delca v reprezentaciji z gibalno količino

$$\left[\frac{\mathbf{p_1^2}}{2m} + \frac{\mathbf{p_2^2}}{2m} + V(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2})\right] \chi(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}) = E\chi(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}) \,, \tag{2}$$

kjer sta

$$\mathbf{p_1} = -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r_1}} \,, \tag{3}$$

$$\mathbf{p_2} = -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r_2}} \,. \tag{4}$$

Z delovanjem operatorja gibalne količine na valovno funkcijo, se enačba (2) preoblikuje v

$$\int \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[2\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}) - E\right] \chi(\mathbf{k}) \exp[\mathrm{i}\mathbf{k}(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2})] = 0 \,, \tag{5}$$

oziroma

$$\int \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[E - 2\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right] \chi(\mathbf{k}) \exp[\mathrm{i}\mathbf{k}(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2})] = \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{(2\pi)^3} V(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}) \chi(\mathbf{k}) \exp[\mathrm{i}\mathbf{k}(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2})] \,. \tag{6}$$

Odvisnost interakcije od $\mathbf{r}$ na desno stran enačbe (6) bi radi prepisali v odvisnost od $\mathbf{k}$. Najprej predpostavimo, da je interakcija odvisna le od razdalje

$$V(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}) \equiv V(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}) \,, \tag{7}$$

torej

$$V(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}) = \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{(2\pi)^3} V(\mathbf{k}) \exp[\mathrm{i}\mathbf{k}(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2})] \,. \tag{8}$$

V enačbi (6) na desni strani eksponentna člena združimo in uvedemo novo spremenljivko $\mathbf{k}''$

$$\exp[\mathrm{i}(\mathbf{k}' + \mathbf{k})((\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}))] \tag{9}$$

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k}'' - \mathbf{k} \,. \tag{10}$$

Nato v integralu na desni strani zamenjamo spremenljivki integracije **k** in **k"**.

Enačba (6) se tako preoblikuje v

$$\int \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\chi(\mathbf{k})\left[E-2\frac{\hbar^2k^2}{2m}\right]\exp[\mathrm{i}\mathbf{k}(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2})] = \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}''}{(2\pi)^3}V(\mathbf{k}-\mathbf{k}'')\chi(\mathbf{k}'')\exp[\mathrm{i}\mathbf{k}(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2})]\,. \tag{11}$$

Integrala po **k** na levi in desni sta enaka, torej mora veljati

$$\left[E-2\frac{\hbar^2k^2}{2m}\right]\chi(\mathbf{k}) = \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}''}{(2\pi)^3}V(\mathbf{k}-\mathbf{k}'')\chi(\mathbf{k}''). \tag{12}$$

V poročilu od tukaj naprej zaradi preglednejšega zapisa namesto $\mathbf{k}''$ uporabljamo $\mathbf{k}'$.

Elektronski nivoji s $\mathbf{k} < \mathbf{k_F}$ so prepovedani za oba elektrona iz česar sledi omejitev

$$\chi(\mathbf{k}) = 0\,;\ \mathbf{k} < \mathbf{k_F}\,. \tag{13}$$

Interakcijo opišemo s preprosto privlačno interakcijo

$$V(\mathbf{k},\mathbf{k}') \equiv V(\mathbf{k}-\mathbf{k}') = \begin{cases} -V\,; & \varepsilon_F \le \frac{\hbar^2k^2}{2m} \le \varepsilon_F + \hbar\omega \\ 0\,, & \text{sicer} \end{cases} \tag{14}$$

Iščemo vezana stanja z energijo E.

Enačbo (12) integriramo po tistih **k** ter **k'**, ki ustrezajo energijam med ε_F in $\varepsilon_F + \hbar\omega$

$$\int_{\varepsilon_F}^{\varepsilon_F+\hbar\omega}\frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\chi(\mathbf{k}) = \int_{\varepsilon_F}^{\varepsilon_F+\hbar\omega}\frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{-V}{E-2\frac{\hbar^2k^2}{2m}}\int_{\varepsilon_F}^{\varepsilon_F+\hbar\omega}\frac{\mathrm{d}\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\chi(\mathbf{k}') \tag{15}$$

Integral po **k** na levi in integral po **k'** na desni strani enačbe (15) sta enaka. Uvedemo zapis

$$\frac{\hbar^2k^2}{2m} = \varepsilon \tag{16}$$

in enačbo (15) preoblikujemo v

$$1 = V\int_{\varepsilon_F}^{\varepsilon_F+\hbar\omega}\frac{\rho(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon}{2\varepsilon - E}\,, \tag{17}$$

kjer namesto da integriramo po **k** uvedemo gostoto stanj elektronov

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \rho(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon \tag{18}$$

ter tako integriramo po energiji.

Ker se energija ne razlikuje veliko od fermijeve energije velja

$$\rho(\varepsilon) \approx \rho(\varepsilon_F)\,. \tag{19}$$

Integral iz enačbe (17) se poenostavi

$$\frac{1}{V\rho(\varepsilon_F)} = \int_{\varepsilon_F}^{\varepsilon_F+\hbar\omega}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{2\varepsilon - E} \tag{20}$$

Po integriranju sledi

$$\exp\left(\frac{2}{V\rho(\varepsilon_F)}\right) = 1 + \frac{2\hbar\omega}{2\varepsilon - E}\,. \tag{21}$$

Vpeljemo količino

$$\Delta = 2\varepsilon - E\,. \tag{22}$$

Iz enačbe (21) tako sledi

$$\Delta = 2\hbar\omega \frac{1}{1 - \exp\left(\frac{2}{\rho(\varepsilon_F)V}\right)}\,. \tag{23}$$

Ulomek v enačbi (23) na desni zgoraj in spodaj pomnožimo z

$$\exp\left(-\frac{2}{\rho(\varepsilon_F)V}\right) \tag{24}$$

ter tako zapišemo rezultat v obliki

$$\Delta = 2\hbar\omega \frac{\exp\left(-\frac{2}{\rho(\varepsilon_F)V}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{2}{\rho(\varepsilon_F)V}\right)}\,. \tag{25}$$

V približku šibke interakcije $\rho(\varepsilon_F)V \ll 1$ lahko spodnji eksponentni člen v enačbi (25) zanemarimo

$$\Delta = 2\hbar\omega \exp\left(-\frac{2}{\rho(\varepsilon_F)V}\right)\,. \tag{26}$$

Enačba (26) nam pove, da za še tako majhno privlačno interakcijo med elektronoma, vedno dobimo vezana stanja z pripadajočo energijo E.