

FIZIKA TRDNE SNOVI 2007/08

SPECIFIČNA TOPLOTA PARAMAGNETA

Žiga Lenarčič*

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

24. maj 2008

1 Naloga

Imamo sistem atomov s splošno vrtilno količino J . Pokazali bomo¹, da je v tem primeru specifična toplota (pri konstantnem polju H) izrazljiva s susceptibilnostjo:

$$c_H = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_H = \mu_0 \frac{H^2 \chi}{T}. \quad (1)$$

V območju Curiejevega zakona se zgornji izraz zapiše kot:

$$c_H = \frac{1}{3} \frac{N}{V} k_B J(J+1) \left(\frac{g\mu_0\mu_B H}{k_B T} \right)^2. \quad (2)$$

2 Rešitev

Specifična toplota. Radi bi izračunali specifično toploto podano z izrazom $c_H = T(\partial s/\partial T)_H$, za kar pa potrebujemo specifično entropijo s . Entropijo bomo izrazili s pomočjo termodinamske relacije.

TD relacije. Entropijo bomo izrazili iz termodinamskega izraza za prosto energijo snovi v magnetnem polju

$$F = E - TS - VHM, \quad (3)$$

kjer je T temperatura, V volumen, M magnetizacija, H magnetno polje, E pa energija. V diferencialni obliki se izraz glasi $dF = dE - TdS - SdT - VMdH - VHdM$, pri čemer je diferencial energije $dE = TdS + VHdM$. Nekaj členov se nam odšteje in pristanemo na zvezi iz katere izrazimo entropijo kot parcialni odvod proste energije po temperaturi pri konstantnem polju H :

$$dF = -SdT - \underbrace{\mu_0 VM}_{=0} dH \quad \rightarrow \quad S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_H \quad (4)$$

Za potrebe naše naloge si pripravimo zvezo med odvodom po T in odvodom po $\beta = 1/k_B T$:

$$\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial(1/k_B\beta)} = \frac{\partial}{-\frac{1}{k_B^2\beta^2} k_B \partial\beta} = -k_B\beta^2 \frac{\partial}{\partial\beta} \quad (5)$$

*e-mail naslov: ziga.lenaric@student.fmf.uni-lj.si.

¹Ashcroft 669/10

Sedaj zamenjajmo odvode po temperaturi v izrazih za specifično toploto in za entropijo z odvodi po $\beta = 1/k_B T$ - zgolj zato, da si olajšamo račune. Nova izraza se glasita:

$$c_H = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_H \rightarrow c_H = -\beta \left(\frac{\partial s}{\partial \beta} \right)_H; \quad S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_H \rightarrow S = k_B \beta^2 \left(\frac{\partial F}{\partial \beta} \right)_H \quad (6)$$

Prosta energija F. Pokažimo, da je prosta energija funkcija oblike $F = \frac{1}{\beta} \Phi(\beta H)$. V Ashcroftu (in pri predavanjih) je prosta energija izražena z vsoto

$$e^{-\beta F} = \sum_{J_z=-J}^J e^{-\beta \gamma H J_z}, \quad (7)$$

kjer je $\gamma = g(JLS)\mu_B\mu_0$ (konstantna v našem primeru).

Zgornja geometrijska vrsta se sešteje v spodnji izraz, iz katerega je razvidna oblika izraza za prosto energijo F :

$$e^{-\beta F} = \frac{e^{\beta \gamma H(J+1/2)} - e^{-\beta \gamma H(J+1/2)}}{e^{\beta \gamma H/2} - e^{-\beta \gamma H/2}} \rightarrow F = \frac{1}{\beta} \left[-\ln \left(\frac{e^{\beta \gamma H(J+1/2)} - e^{-\beta \gamma H(J+1/2)}}{e^{\beta \gamma H/2} - e^{-\beta \gamma H/2}} \right) \right]. \quad (8)$$

Odvajanje izraza za F. Sedaj le še odvajamo prosto energijo oblike $F = \frac{1}{\beta} \Phi(\beta H)$ in dokažimo ekvivalenco. Uporabimo verižno pravilo (odvod funkcije in nato še odvod argumenta funkcije) in pravilo za odvajanje zmnožka funkcij.

$$S = k_B \beta^2 \left(\frac{\partial F}{\partial \beta} \right)_H = k_B \beta^2 \left[-\frac{1}{\beta^2} \Phi(\beta H) + \frac{1}{\beta} \Phi'(\beta H) H \right] = k_B [-\Phi(\beta H) + \beta H \Phi'(\beta H)] \quad (9)$$

Uporabimo zvezo za specifično entropijo na enoto volumna $s = \frac{S}{V}$. Dobljena specifična toplota bo prav tako veljala za enoto volumna, lahko pa jo enako definiramo tudi za drugačne enote.

$$c_H = -\beta \left(\frac{\partial s}{\partial \beta} \right)_H = -\frac{k_B \beta}{V} [-H \Phi'(\beta H) + H \Phi'(\beta H) + \beta H^2 \Phi''(\beta H)] = -\frac{H^2}{T} \frac{1}{V} \beta \Phi''(\beta H) \quad (10)$$

Susceptibilnost χ . Izračunajmo še susceptibilnost. Velja

$$M = -\frac{1}{V \mu_0} \frac{\partial F}{\partial H}; \quad \chi = \frac{\partial M}{\partial H} = -\frac{1}{V \mu_0} \frac{\partial^2 F}{\partial H^2}, \quad (11)$$

kjer je M magnetizacija. Odvajajmo sedaj prosto energijo oblike $F = \frac{1}{\beta} \Phi(\beta H)$ po magnetnem polju H :

$$\chi = -\frac{1}{V \mu_0} \frac{1}{\beta} \beta^2 \Phi''(\beta H) = -\frac{1}{V \mu_0} \beta \Phi''(\beta H) \quad (12)$$

Dobljeni rezultat hitro prepoznamo v izračunani specifični toploti (10). Torej lahko specifično toploto izrazimo s pomočjo susceptibilnosti, tako kot smo si to zastavili v nalogi - pokazali smo, da drži zveza:

$$c_H = -\beta \left(\frac{\partial s}{\partial \beta} \right)_H = -\frac{H^2}{T} \frac{1}{V} \beta \Phi''(\beta H) = \mu_0 \frac{H^2 \chi}{T} \quad (13)$$

Območje Curiejevega zakona. V območju Curiejevega zakona je susceptibilnost enaka²

$$\chi = \frac{N \mu_0 (g \mu_B)^2 J(J+1)}{V 3 k_B T}. \quad (14)$$

² Ashcroft, stran 656 ali zapiski s predavanj

Sedaj ta izraz vstavimo v izračunano specifično toploto in dobimo izraz za specifično toploto v območju Curiejevega zakona:

$$c_H = \mu_0 \frac{H^2 \chi}{T} = \frac{1}{3} \frac{N}{V} k_B J(J+1) \left(\frac{g \mu_B \mu_0 H}{k_B T} \right)^2. \quad (15)$$

Ponovitev. Pogledjmo si na hitro izvor izraza (14). Magnetizacija N ionov v volumnu V s prosto energijo izraženo iz izraza (8) se s pomočjo Brillouinovih funkcij zapiše kot

$$M = -\frac{N}{V \mu_0} \frac{\partial F}{\partial H} = \frac{N}{V \mu_0} \gamma J B_J(\beta \gamma J H), \quad (16)$$

kjer je Brillouinova funkcija $B(x)$ definirana kot

$$B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \coth \frac{2J+1}{2J} x - \frac{1}{2J} \coth \frac{1}{2J} x. \quad (17)$$

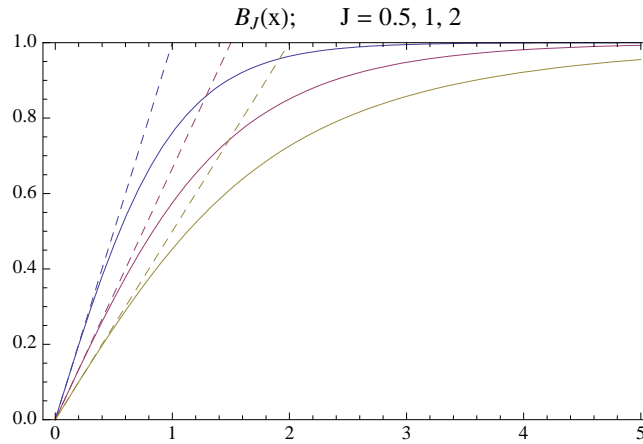
Uporabili smo zvezo $\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, da smo “pospravili” eksponentne funkcije. Za Curiejevo območje uporabimo aproksimacijo za $\gamma H \ll k_B T \rightarrow x \ll 1$ in se nam Brillouinova funkcija poenostavi

$$B_J(x) \approx \frac{J+1}{3J} x + O(x^3), \quad (18)$$

tako da izraz za magnetizacijo dobi obliko

$$M = \frac{N}{V} \gamma^2 \frac{J(J+1)}{3} \beta \mu_0 H. \quad (19)$$

Susceptibilnost $\chi = \partial M / \partial H$ dobi obliko (14). $\gamma = g \mu_B$, kjer je g Landejev g -faktor. Podrobnosti v Ashcroftu v poglavju 31.



Slika 1: Brillouinova funkcija [polna] in njena aproksimacija za majhne x [črtkano] za vrednosti $J = \frac{1}{2}, 1, 2$ [od leve proti desni].