FIZIKA TRDNE SNOVI (VAJE)
Šolsko leto 2007/08

Hallov pojav v sistemu z dvema vrstama nosilcev naboja

27. november 2007
Gašper Renko

Naloga
Imamo frekvenčno odvisno električno polje v smeri osi x. V Drudejevem modelu bomo izračunali Hallovo konstanto in specifično prevodnost snovi za primer, ko imamo v snovi dve vrsti nosilcev naboja.

Izračun
Na predavanjih smo izpeljali enačbo za Druderjev model:

$$\dot{\vec{p}} + \frac{\vec{p}}{\tau} = \vec{F}(t)$$

$$\dot{\vec{p}} + \frac{\vec{p}}{\tau} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Ko upoštevamo frekvenčno odvisno električno polje, gibalno količino nabitega delca in zvezi za gibalno količino ter gostoto toka:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{j} = en\vec{v}$$

In pokrajšamo eksponente in prestavimo vektorski produkt z desne na levo stran enačbe, dobimo:

$$\frac{m}{\tau}(1 - i\omega\tau)\vec{j}_0 - e\vec{j}_0 \times \vec{B} = e^2 n \vec{E}_0$$

izračunamo vektorski produkt:

$$\begin{pmatrix} j_{0x} \\ j_{0y} \\ j_{0z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = i(j_{0y}B) - j(j_{0x}B)$$

Dobimo enačbo:

$$\frac{m}{\tau}(1-i\omega\tau)\begin{pmatrix} j_{0x} \\ j_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} - e\begin{pmatrix} j_{0y}B \\ -j_{0x}B \\ 0 \end{pmatrix} = e^2 n\begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix}$$

Ki jo razpišemo po komponentah:

$$E_{0x} = \frac{m}{e^2 n\tau}(1-i\omega\tau)\, j_{0x} - \frac{B}{en}\, j_{0y}$$

$$E_{0y} = \frac{m}{e^2 n\tau}(1-i\omega\tau)\, j_{0y} - \frac{B}{en}\, j_{0x}$$

$$E_{0z} = \frac{m}{e^2 n\tau}(1-i\omega\tau)\, j_{0z}$$

ali v matrični obliki:

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} \frac{m}{e^2 n\tau}(1-i\omega\tau) & -\frac{B}{en} \\ \frac{B}{en} & \frac{m}{e^2 n\tau}(1-i\omega\tau) \end{pmatrix}\vec{j}_0$$

Kjer lahko z komponento izpustimo, ker nam nič ne prinese k rešitvi, računanje z matrikami dimenzije 2x2 pa je bolj prijazno, kot pa z matrikami 3x3. Na vajah dne 21.11.2007 smo že izračunali Hallovo konstanto za primer samo ene vrste nosilcev naboja. Za rezultate smo dobili podobne izraze, ki pri obravnavanem problemu nastopajo v zgornji matriki kot členi.

$$\rho\ (\omega) = \frac{m}{e^2 n\tau}(1-i\omega\tau)$$

$$R_H = \frac{1}{en}$$

In tako

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} \rho(\omega) & -BR_H \\ BR_H & \rho(\omega) \end{pmatrix}\vec{j}_0 = \underline{\underline{\rho}}(\omega)\vec{j}_0$$

Imamo dve različni vrsti nosilcev naboja, pri katerih so v splošnem različni predznak naboja, relaksacijski čas, število, in masa. Zgornje razmišljanje velja za vsako vrsto nosilcev posebaj...tako zapišemo:

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} \rho_1(\omega) & -BR_{H1} \\ BR_{H1} & \rho_1(\omega) \end{pmatrix}\vec{j}_0 = \underline{\underline{\rho_1}}(\omega)\vec{j}_0 \qquad \vec{E}_0 = \begin{pmatrix} \rho_2(\omega) & -BR_{H2} \\ BR_{H2} & \rho_2(\omega) \end{pmatrix}\vec{j}_0 = \underline{\underline{\rho_2}}(\omega)\vec{j}_0$$

Spomnimo se zveze:

$$\vec{j}_0 = \underline{\underline{\sigma}}(\omega)\vec{E}_0\ ,kjer\ \ je\ \ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\rho}}^{-1}$$

Gostota toka je seštevek obeh tokov:

$$\vec{j}_0 = \vec{j}_{01} + \vec{j}_{02} = \underline{\underline{\sigma_1}}(\omega)\vec{E}_0 + \underline{\underline{\sigma_2}}(\omega)\vec{E}_0 = \left[\underline{\underline{\rho_1^{-1}}}(\omega) + \underline{\underline{\rho_2^{-1}}}(\omega)\right]\vec{E}_0$$

Nas zanima specifična prevodnost:

$$\vec{E}_0 = \left[\underline{\underline{\rho_1^{-1}}}(\omega) + \underline{\underline{\rho_2^{-1}}}(\omega) \right]^{-1} \vec{j}_0 = \underline{\underline{\rho_0}} \vec{j}_0$$

Računanje inverzov prepuščam bralcu, za mirnejše živce pa priporočam uporabo računalniškega programa. Spomnimo se še, kako se izračuna inverz 2x2 matrike,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

In rezultat:

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho_1\rho_2(\rho_1+\rho_2)+B^2(R_2^2\rho_1+R_1^2\rho_2)}{(\rho_1+\rho_2)^2+(R_2+R_1)^2B^2} & -\dfrac{B(B^2R_1R_2(R_1+R_2)+R_2\rho_1^2+R_1\rho_2^1)}{(\rho_1+\rho_2)^2+(R_2+R_1)^2B^2} \\ \dfrac{B(B^2R_1R_2(R_1+R_2)+R_2\rho_1^2+R_1\rho_2^1)}{(\rho_1+\rho_2)^2+(R_2+R_1)^2B^2} & \dfrac{\rho_1\rho_2(\rho_1+\rho_2)+B^2(R_2^2\rho_1+R_1^2\rho_2)}{(\rho_1+\rho_2)^2+(R_2+R_1)^2B^2} \end{pmatrix} \vec{j}_0$$

Spomnimo se, da smo izračunali:

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} \rho(\omega) & -BR_H \\ BR_H & \rho(\omega) \end{pmatrix} \vec{j}_0 = \underline{\underline{\rho}}(\omega)\vec{j}_0$$

In z primerjavo členov med matrikami dobimo iskana rezultata:

$$\rho(\omega) = \frac{\rho_1\rho_2(\rho_1+\rho_2)+B^2(R_2^2\rho_1+R_1^2\rho_2)}{(\rho_1+\rho_2)^2+(R_2+R_1)^2B^2} \qquad R_H = \frac{B^2R_1R_2(R_1+R_2)+R_2\rho_1^2+R_1\rho_2^1}{(\rho_1+\rho_2)^2+(R_2+R_1)^2B^2}$$

Kjer lahko opazimo specifično prevodnost in Hallovo konstanto v odvisnosti od magnetnega polja.

FIZIKA TRDNE SNOVI (VAJE)
Šolsko leto 2007/08

Hallov pojav v sistemu z dvema vrstama nosilcev naboja

27. november 2007
Gašper Renko

Naloga

Imamo frekvenčno odvisno električno polje v smeri osi x. V Drudejevem modelu bomo izračunali Hallovo konstanto in specifično prevodnost snovi za primer, ko imamo v snovi dve vrsti nosilcev naboja.

Izračun

Na predavanjih smo izpeljali enačbo za Druderjev model:

$$\dot{\vec{p}} + \frac{\vec{p}}{\tau} = \vec{F}(t)$$

$$\dot{\vec{p}} + \frac{\vec{p}}{\tau} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Ko upoštevamo frekvenčno odvisno električno polje, gibalno količino nabitega delca in zvezi za gibalno količino ter gostoto toka:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{j} = en\vec{v}$$

In pokrajšamo eksponente in prestavimo vektorski produkt z desne na levo stran enačbe, dobimo:

$$\frac{m}{\tau}(1 - i\omega\tau)\vec{j}_0 - e\vec{j}_0 \times \vec{B} = e^2 n \vec{E}_0$$

izračunamo vektorski produkt:

$$\begin{pmatrix} j_{0x} \\ j_{0y} \\ j_{0z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = i(j_{0y}B) - j(j_{0x}B)$$

Dobimo enačbo:

$$\frac{m}{\tau}(1-i\omega\tau)\begin{pmatrix} j_{0x} \\ j_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} - e\begin{pmatrix} j_{0y}B \\ -j_{0x}B \\ 0 \end{pmatrix} = e^2 n \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix}$$

Ki jo razpišemo po komponentah:

$$E_{0x} = \frac{m}{e^2 n\tau}(1-i\omega\tau) j_{0x} - \frac{B}{en} j_{0y}$$

$$E_{0y} = \frac{m}{e^2 n\tau}(1-i\omega\tau) j_{0y} - \frac{B}{en} j_{0x}$$

$$E_{0z} = \frac{m}{e^2 n\tau}(1-i\omega\tau) j_{0z}$$

ali v matrični obliki:

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} \frac{m}{e^2 n\tau}(1-i\omega\tau) & -\frac{B}{en} \\ \frac{B}{en} & \frac{m}{e^2 n\tau}(1-i\omega\tau) \end{pmatrix} \vec{j}_0$$

Kjer lahko z komponento izpustimo, ker nam nič ne prinese k rešitvi, računanje z matrikami dimenzije 2x2 pa je bolj prijazno, kot pa z matrikami 3x3. Na vajah dne 21.11.2007 smo že izračunali Hallovo konstanto za primer samo ene vrste nosilcev naboja. Za rezultate smo dobili podobne izraze, ki pri obravnavanem problemu nastopajo v zgornji matriki kot členi.

$$\rho\ (\omega) = \frac{m}{e^2 n\tau}(1-i\omega\tau)$$

$$R_H = \frac{1}{en}$$

In tako

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} \rho(\omega) & -BR_H \\ BR_H & \rho(\omega) \end{pmatrix} \vec{j}_0 = \underline{\underline{\rho}}(\omega)\vec{j}_0$$

Imamo dve različni vrsti nosilcev naboja, pri katerih so v splošnem različni predznak naboja, relaksacijski čas, število, in masa. Zgornje razmišljanje velja za vsako vrsto nosilcev posebaj...tako zapišemo:

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} \rho_1(\omega) & -BR_{H1} \\ BR_{H1} & \rho_1(\omega) \end{pmatrix} \vec{j}_0 = \underline{\underline{\rho_1}}(\omega)\vec{j}_0 \qquad \vec{E}_0 = \begin{pmatrix} \rho_2(\omega) & -BR_{H2} \\ BR_{H2} & \rho_2(\omega) \end{pmatrix} \vec{j}_0 = \underline{\underline{\rho_2}}(\omega)\vec{j}_0$$

Spomnimo se zveze:

$$\vec{j}_0 = \underline{\underline{\sigma}}(\omega)\vec{E}_0\ , kjer\ \ je\ \ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\rho}}^{-1}$$

Gostota toka je seštevek obeh tokov:

$$\vec{j}_0 = \vec{j}_{01} + \vec{j}_{02} = \underline{\underline{\sigma_1}}(\omega)\vec{E}_0 + \underline{\underline{\sigma_2}}(\omega)\vec{E}_0 = \left[\underline{\underline{\rho_1^{-1}}}(\omega) + \underline{\underline{\rho_2^{-1}}}(\omega)\right]\vec{E}_0$$

Nas zanima specifična prevodnost:

$$\vec{E}_0 = \left[\underline{\underline{\rho_1}}^{-1}(\omega) + \underline{\underline{\rho_2}}^{-1}(\omega) \right]^{-1} \vec{j}_0 = \underline{\underline{\rho_0}} \vec{j}_0$$

Računanje inverzov prepuščam bralcu, za mirnejše živce pa priporočam uporabo računalniškega programa. Spomnimo se še, kako se izračuna inverz 2x2 matrike,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

In rezultat:

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho_1\rho_2(\rho_1+\rho_2) + B^2(R_2^2\rho_1 + R_1^2\rho_2)}{(\rho_1+\rho_2)^2 + (R_2+R_1)^2 B^2} & -\dfrac{B(B^2R_1R_2(R_1+R_2) + R_2\rho_1^2 + R_1\rho_2^1)}{(\rho_1+\rho_2)^2 + (R_2+R_1)^2 B^2} \\ \dfrac{B(B^2R_1R_2(R_1+R_2) + R_2\rho_1^2 + R_1\rho_2^1)}{(\rho_1+\rho_2)^2 + (R_2+R_1)^2 B^2} & \dfrac{\rho_1\rho_2(\rho_1+\rho_2) + B^2(R_2^2\rho_1 + R_1^2\rho_2)}{(\rho_1+\rho_2)^2 + (R_2+R_1)^2 B^2} \end{pmatrix} \vec{j}_0$$

Spomnimo se, da smo izračunali:

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} \rho(\omega) & -BR_H \\ BR_H & \rho(\omega) \end{pmatrix} \vec{j}_0 = \underline{\underline{\rho}}(\omega)\vec{j}_0$$

In z primerjavo členov med matrikami dobimo iskana rezultata:

$$\rho(\omega) = \frac{\rho_1\rho_2(\rho_1+\rho_2) + B^2(R_2^2\rho_1 + R_1^2\rho_2)}{(\rho_1+\rho_2)^2 + (R_2+R_1)^2 B^2} \qquad R_H = \frac{B^2R_1R_2(R_1+R_2) + R_2\rho_1^2 + R_1\rho_2^1}{(\rho_1+\rho_2)^2 + (R_2+R_1)^2 B^2}$$

Kjer lahko opazimo specifično prevodnost in Hallovo konstanto v odvisnosti od magnetnega polja.